- RSX101-
Réseaux Et Protocoles pour l'Internet

Eléments de Couche Physique

G. Florin, S. Natkin & E. Gressier-Soudan

Plan du cours

- Contextualisation par rapport aux objectifs de RSX101
- Transmission et Bande Passante
- Transmission en présence de Bruit
- Détection et Correction d'Erreur
- Représentation des signaux : Synchronisation, Modulation
- Conclusion

Contextualisation du cours

Objectif du cours

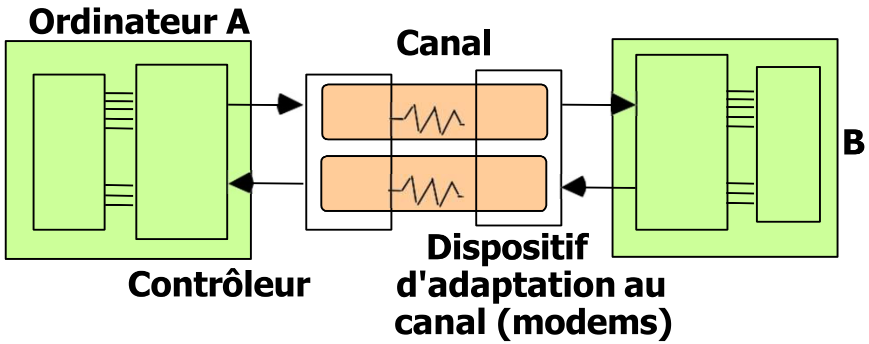
- **Ne pas faire un cours d'Electronique à des informaticiens**. Il y a des cours plus complets et plus précis faits par l'EPN03. La théorie du signal est un domaine à part entière lié aux cursus d'électronique, de radiocommunications et d'électro-technique... Voire plus globalement en physique.
- Donner des **repères fondamentaux** plus qu'une formation exhaustive.
- Plus qu'un cours formel, l'objectif est de **découvrir quelques concepts clefs du niveau physique** à travers des exercices.
- Amorcer un processus de réflexion pour creuser dans le cadre professionnel le cas échéant.

Références Bibliographiques

- Niveau Physique, polycopié NFP104, 2008. G. Florin, S. Natkin.
- Cours TI CNU. Theorie de l'information, Communications numériques. FIP- CPI. Version 2.7. 15 mars 2011. Didier Le Ruyet
- Bases de Communications Numeriques 1 : 31 août 2015. Mylène Pischella, Didier Le Ruyet
- Théorie et technique de la transmission des données Tome 1 – 1977. Jacques Clavier, Marcel Niquil, Gérard Coffinet, Francis Behr
- Electronique Analogique. ELE004. Filtrage et Amplificateur Opérationnel. Didier Le Ruyet. Octobre 2007.

La partie théorique de base de la signalisation ne change pas fondamentalement depuis les années 80. Ce n'est pas le cas des technologies qui elles offrent des débits de plus en plus élevés avec une électronique de plus en plus élaborée pour faire des encodages qui résistent mieux aux erreurs et aux perturbations diverses, et qui offrent un débit de plus en plus élevé.

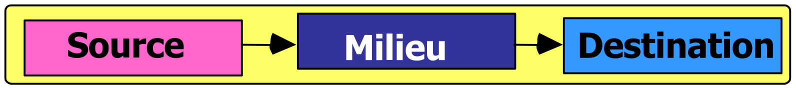
Notre problématique technique exprimée au millénaire précédent :



Aujourd'hui :

Source : https://kb.netgear.com/fr/22558/Configuration-manuelle-d-un-routeur-pour-le-service-Internet-par-câble-DHCP-1479991139955

Un premier modèle simpliste :



Information & Energie.. à méditer

- Dans *Théorie et technique de la transmission des données Tome 1 – 1977. Jacques Clavier, Marcel Niquil, Gérard Coffinet, Francis Behr* : "… les deux grandeurs les plus importantes utilisées par notre civilisation sont l'information et l'énergie, liées l'une à l'autre par la célèbre formule de Shannon."
  Entropie d'information : H = - K log p (quantité d'information)
- D'après *http://www.ac-grenoble.fr/lycee/vaucanson/philosophie/lk_claude_shannon.htm* "
  - À mettre en correspondance avec l'entropie en thermodynamique définie par l'équation de Boltzmann-Gibbs : **S = K log p (nombre d'états), qui est son inverse (signe -).**
  - …voient une relation logique entre le H de Shannon et le S de Boltzmann. Selon ce point de vue, il est possible d'inscrire l'information selon Shannon dans la physique : en effet, il existe une dualité dans le concept d'information reliant l'information à la matière/énergie qui véhicule cette information. L'information selon Shannon s'enracine bien dans la physique et les mathématiques, mais sans qu'on puisse la réduire aux concepts de la physique classique de masse et d'énergie.
    Ce que Wiener souligne ainsi : « L'information n'est ni la masse, ni l'énergie. L'information c'est l'information. » "

Canal de transmission ?

- **Disposer d'un support Physique** qui véhicule les signaux qui portent des données :
  - fils métalliques => signaux électriques
  - atmosphère => ondes radio, lumière
  - fibre optique => lumière
- **Canal de transmission :**
  - une source (dispositif d'adaptation en émission),
  - un médium (un milieu de transmission)
  - et une destination (dispositif adaptation en réception).

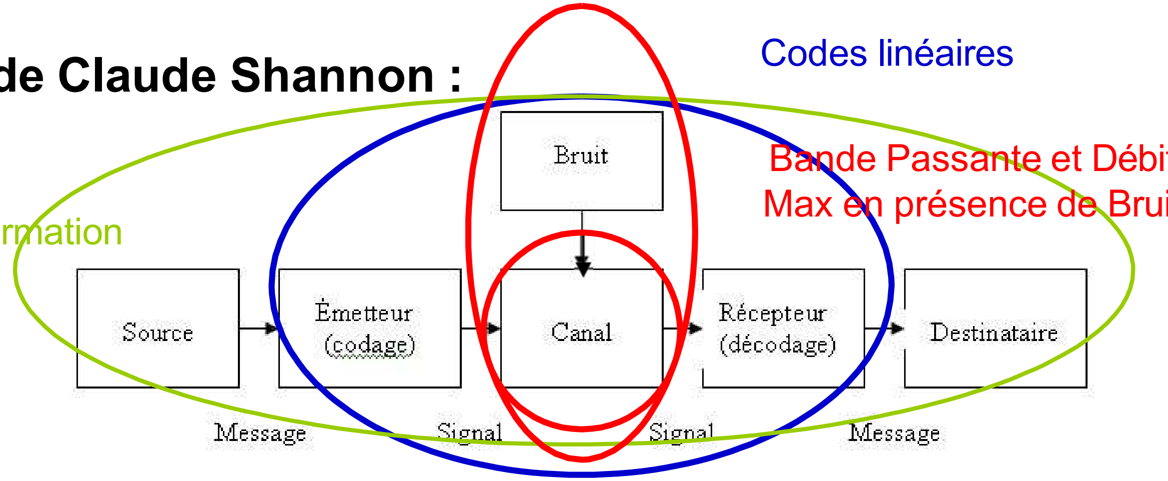
Problème principal du Canal de transmission : débit binaire

On vise un débit binaire pour transmettre des données d'un équipement à un autre à travers un médium de transmission. Ce débit est fonction des caractéristiques de ce médium :

- **Sa bande passante** : bande des fréquences qui passent à travers le canal (celles qui arrivent au récepteur).
- **La déformation du signal** : distorsions apportées par les imperfections de la transmission.
- **Le bruit** : influences externes provoquées dans le canal par le milieu extérieur.

Transmission d'information

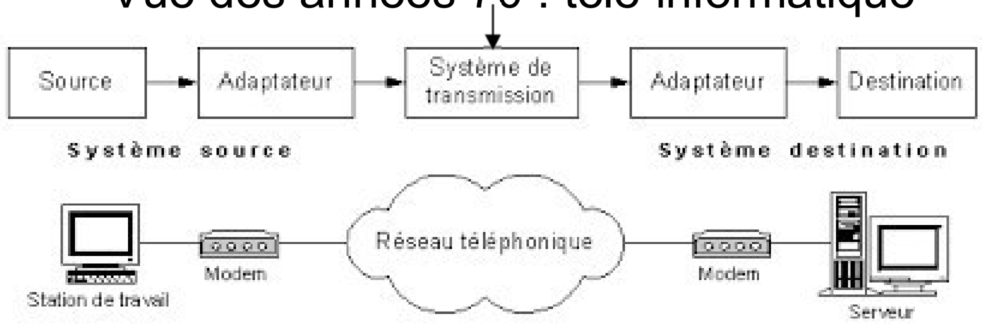
Schéma de Claude Shannon :



1) La source d'information énonce un message …
2) … que l'émetteur va décoder et transformer en signal,
3) lequel va être acheminé par le canal,
4) puis décodé par le récepteur, qui reconstitue un message à partir qui signal
5) et le transmet enfin au destinataire.

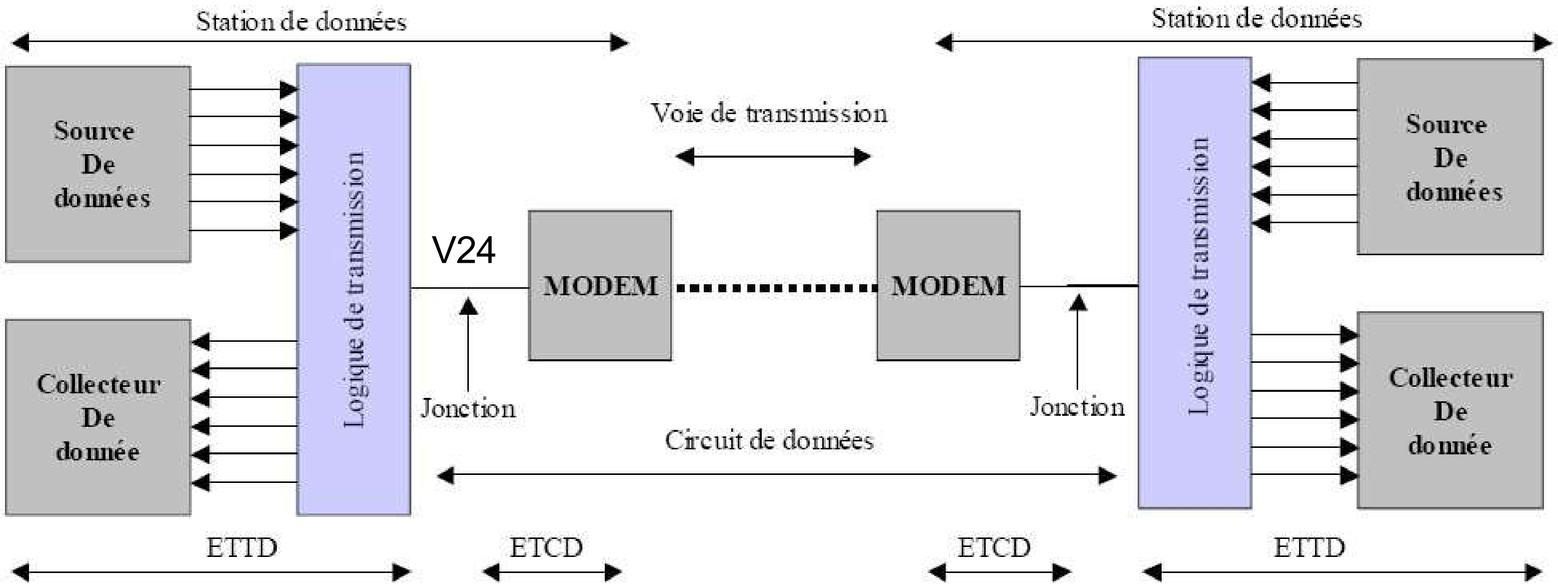
Source : http://nalya.canalblog.com/archives/2008/01/09/7499662.html

Vue des années 70 : télé-informatique



Source : http://jmainy.free.fr/guill.web-/Transmission.html

La Téléinformatique



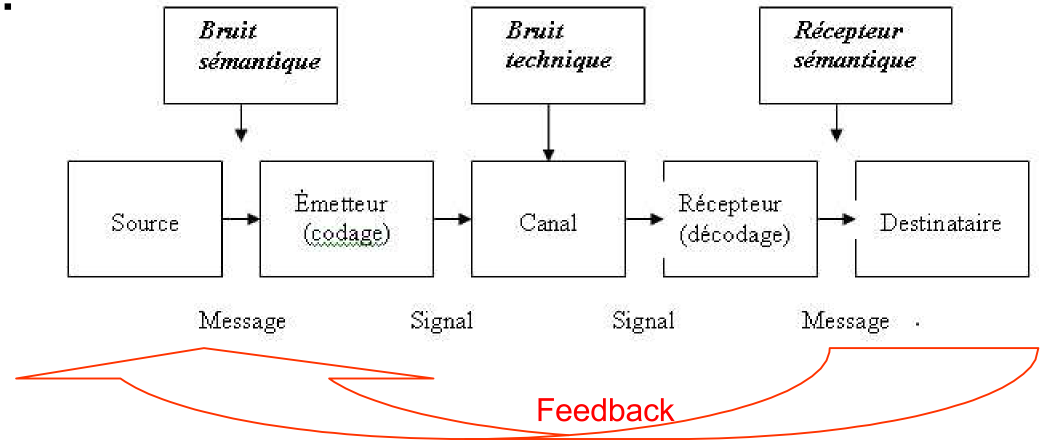
Source : https://m.20-bal.com/pravo/8815/index.html

ETCD : Equipement Terminal de Circuit de Données

ETTD : Equipement Terminal de Traitement de Données

Pas si simple…

- Les concepts sur le système de la communication sont affinés avec les apports de Norbert Wiener et de Waren Wearer :



  - Bruit Technique : toute source d'interférence susceptible de détériorer le signal
  - Bruit Sémantique : perturbation ou distorsion de signification
  - Récepteur Sémantique : mettre du sens sur les mots du code
  - *On pourrait ajouter aujourd'hui un bruit cognitif !*

Informations tirées de : http://nalya.canalblog.com/archives/2008/01/09/7499662.html (27/10/2020) qui référence comme source le livre de François Heinderyckx **Une introduction aux fondements théoriques de l'étude des médias. : 2e édition – Novembre 2002.**

Objectifs du niveau Physique

Rôle :

- **Transmission effective** des informations binaires sur une voie physique en s'adaptant aux contraintes du support matériel utilisé.

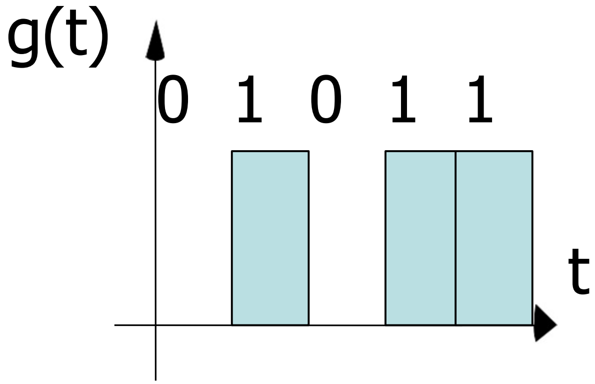
Problèmes à résoudre:

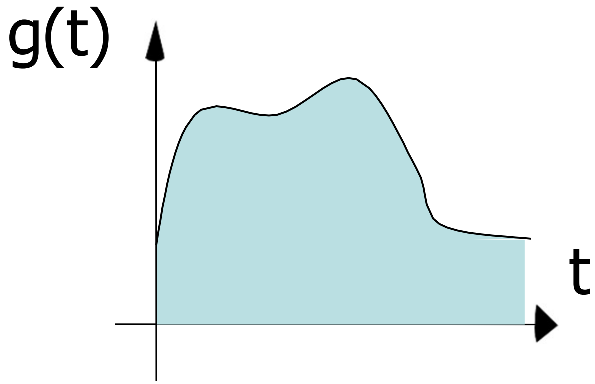
- **Synchronisation** : délimitation des informations significatives.
- **Modulation** : représentation des bits (électronique, radio ou optique).
- **Mécaniques** : réalisation des connecteurs (connectique).

Transmission et Bande Passante

Cas 1 : Canal sans bruit en bande limitée

- **La bande de fréquences est limitée à une valeur B (Hertz)**.
- **On ne s'intéresse pas au problème des bruits additifs.**
- **La source module** les données à émettre (les bits) par **une fonction g(t)** du temps : une représentation dans le domaine temporel d'un signal numérique ou analogique/continu.

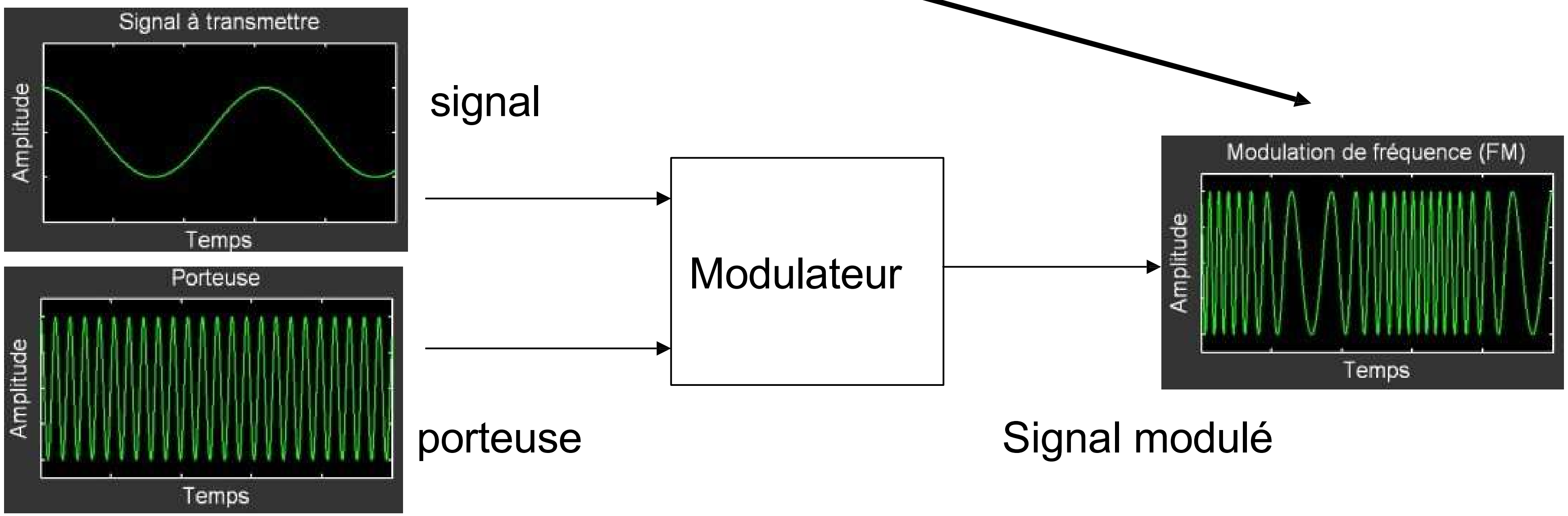




- **Outil de cette étude :** l'analyse de Fourier.
- **Objectif** : Introduire l'importance de la disponibilité d'une large **bande passante** => passer dans le **domaine fréquentiel**.

Transmission d'un signal sur le réseau de données

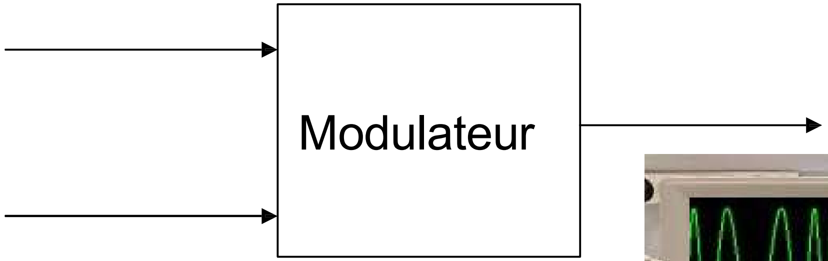
- Ce qui nous intéresse, c'est le signal modulé, et ce qu'il "subit" sur le médium

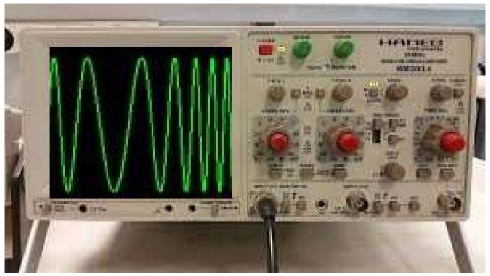


- Le médium a ses propres caractéristiques, et a nécessairement un effet sur le signal indépendamment de tout parasitage (bruit, atténuation…).

Ce qu'on a l'habitude…

- On visualise la transmission en ondes, c'est facile, on se le représente bien. **L'onde** est une **représentation temporelle** d'un signal.





- Mais pas idéale pour faire de l'ingénierie du signal.

… Il faut penser fréquences et spectre de raies

Décomposition en série de Fourier d'une fonction f(t) périodique

- Les **Séries de Fourier** permettent de décomposer une fonction périodique, continue ou continue par morceaux, en une somme infinie de fonctions sinusoïdales élémentaires, les **harmoniques**.
- La définition des coefficients de Fourier porte sur les fonctions périodiques intégrables sur une période.
  - Dans la définition initiale, il est donné des coefficients complexes
  - Pour les fonctions à valeurs réelles, on peut calculer des coefficients réels

Attention !!!!

- En Mathématique : $i^2 = -1$ ou $\sqrt{(-1)}=i$

  Un nombre complese s'écrit : a+ib, b étant la partie imaginaire

- En Physique, et particulièrement en électronique et en automatique : $j^2 = -1$ ou $\sqrt{(-1)}=j$

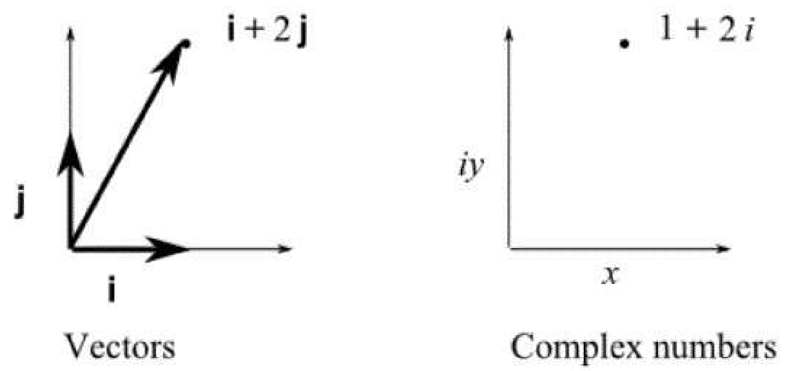
  Un nombre complexe s'écrit a+jb

- Deux noms pour la même chose mais dans des domaines différents, mais se méfier :
  - En Mathématique, $j= -1/2 + i (\sqrt{3})/2$
  - En Electricité, *i* c'est l'intensité d'un courant

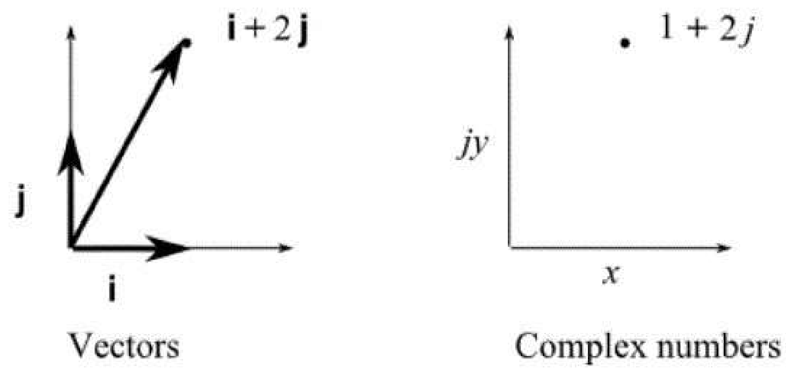
Une visualisation…

- **Why j for imaginary unit?** posted on [23 April 2013] by [John] **D. Cook,**
  Source : https://www.johndcook.com/blog/2013/04/23/why-j-for-imaginary-unit/

Here's what moving from vectors to complex numbers looks like in math notation:



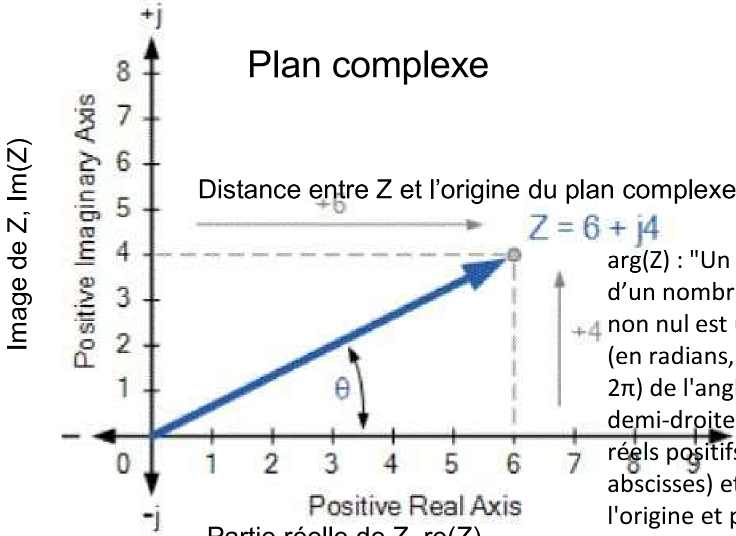
And here's what it looks like in electrical engineering notation:



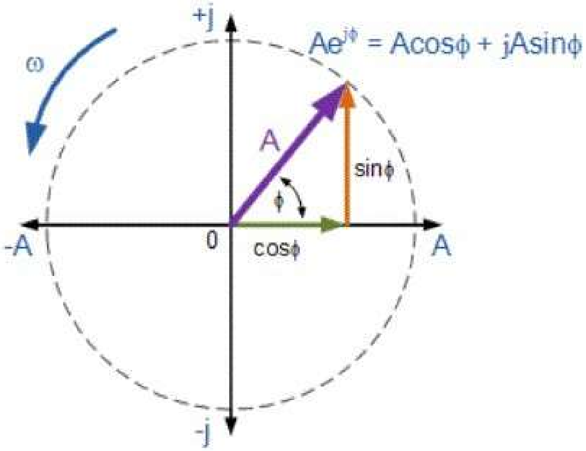
Juste des conventions différentes

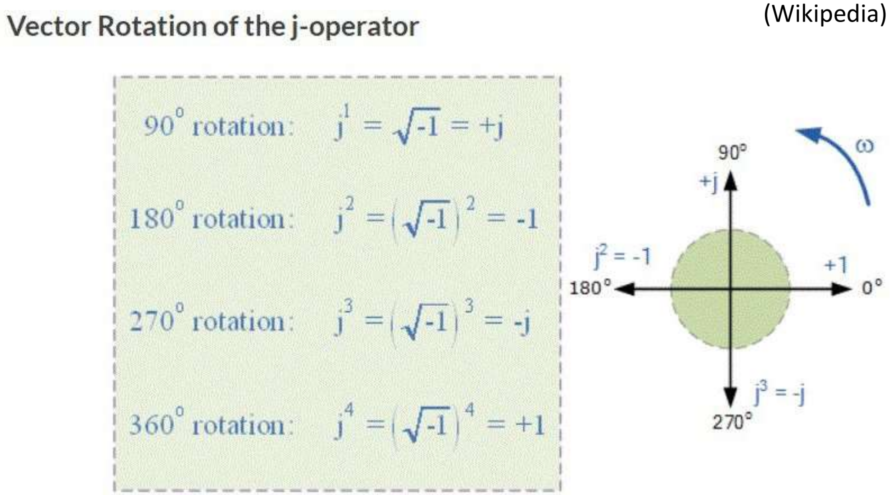
D'autres représentation des nombres complexes en électronique

- Soit un nombre complexe Z=x+jy
  - $A^2 = x^2 + y^2$, A=module de Z, noté |Z|
  - x=A cos θ ; y=A sin θ
  - Z=A(cos θ +i sin θ)
- Représentation d'Euler :



arg(Z) : "Un argument d'un nombre complexe z non nul est une mesure (en radians, donc modulo 2π) de l'angle entre la demi-droite des nombres réels positifs (l'axe des abscisses) et celle issue de l'origine et passant par le point représenté par z " (Wikipedia)





- Forme exponentielle : $Z=Ae^{j\theta}$

Source : https://www.electronics-tutorials.ws/accircuits/complex-numbers.html

Coefficients complexes de f(t) de période T

Source des équations : https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier#Principe_des_s%C3%A9ries_de_Fourier

- Les **coefficients de Fourier** de f (pour $n \in Z$) sont donnés par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}t}\ \mathrm{d}t$$

- Le coefficient c_0 est :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si $n > 0$, on appelle **harmonique de rang n**, notée $H_n(f)$, la fonction sinusoïdale de fréquence n/T :

$$H_n(f) : x \mapsto c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}x} + c_{-n}(f)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}x}$$

- La Série de Fourrier de rang n est :

$$S_n(f) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} H_k(f)$$

- Décomposition en Série de Fourrier de f sous la forme d'une série infinie :

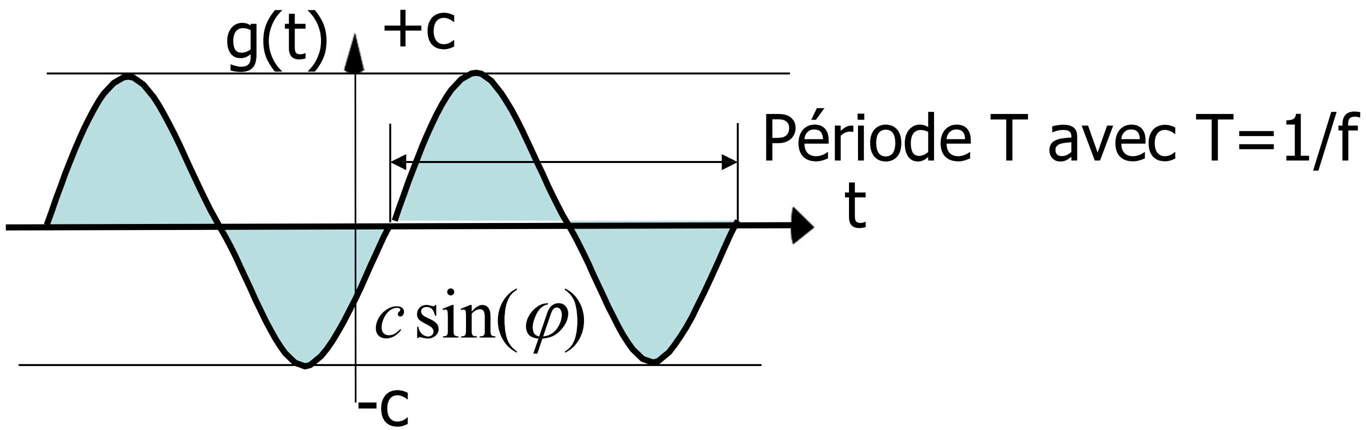
$$f(t) = \lim_{n \to +\infty} S_n(f)$$

Pour mémoire : Fonctions sinusoïdes

- Le signal analogique élémentaire est le sinus (ou le cosinus).

$$g(t) = c\sin(2\pi ft + \varphi)$$

- Signal **périodique** caractérisé par trois paramètres:
  amplitude c, fréquence f, phase



Parfois on utilise la pulsation ω=2πf, ce qui donne : sin(ωt+φ)

Coefficients réels de f(t) de période T

Source des équations : https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_de_Fourier#Principe_des_s%C3%A9ries_de_Fourier

- Les **coefficients réel de Fourier** de f (pour n∈ℕ) sont donnés par :

  - Pour $n>0$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t$
  - Pour $n>0$, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t.$

- $b_0 = 0$, et le coefficient a_0 est : $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t$

- Si $n > 0$, l' **harmonique de rang n** est : $H_n : x \mapsto a_n(f)\cos\left(nx\frac{2\pi}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(nx\frac{2\pi}{T}\right)$

- La Série de Fourrier de rang n est :

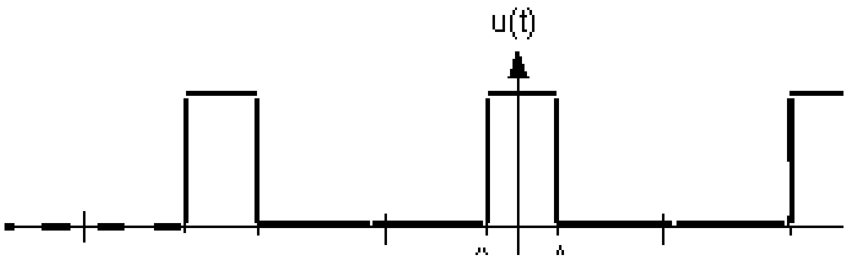
$$S_n(f(x)) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos\left(kx\frac{2\pi}{T}\right) + b_k(f)\sin\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)\right).$$

- Décomposition en Série de Fourrier de f : $f(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)$

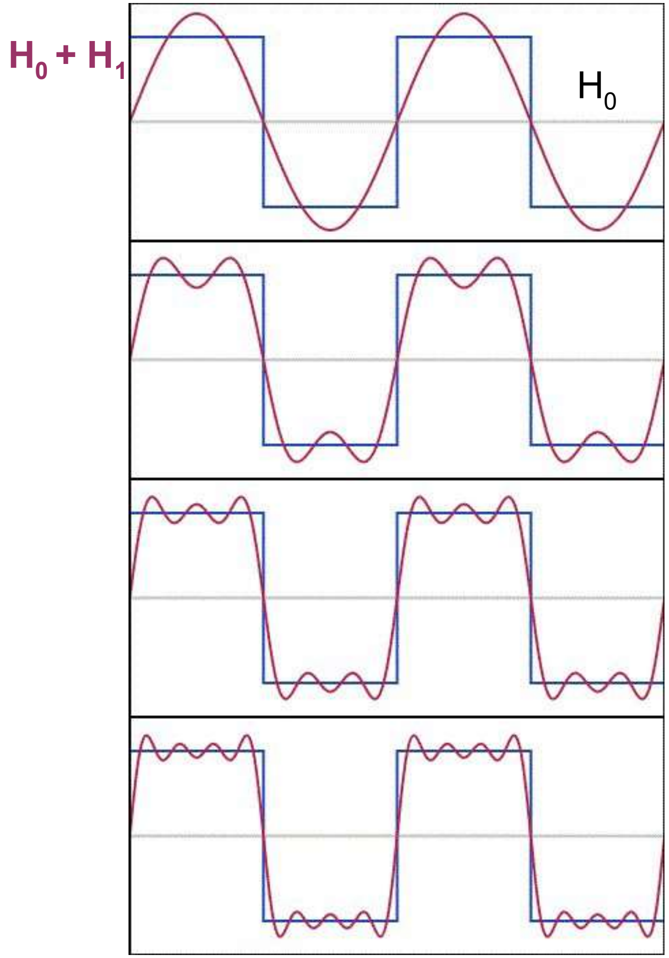
Exemple de Décomposition d'un signal en Série de Fourier

- Signal Carré (comme un signal d'horloge) : somme des 4 premières harmoniques

- Le signal d'horloge est un train d'impulsions particulier dont la durée du front haut est la moitié de la période



Source : http://www.bedwani.ch/electro/ch8/index.htm

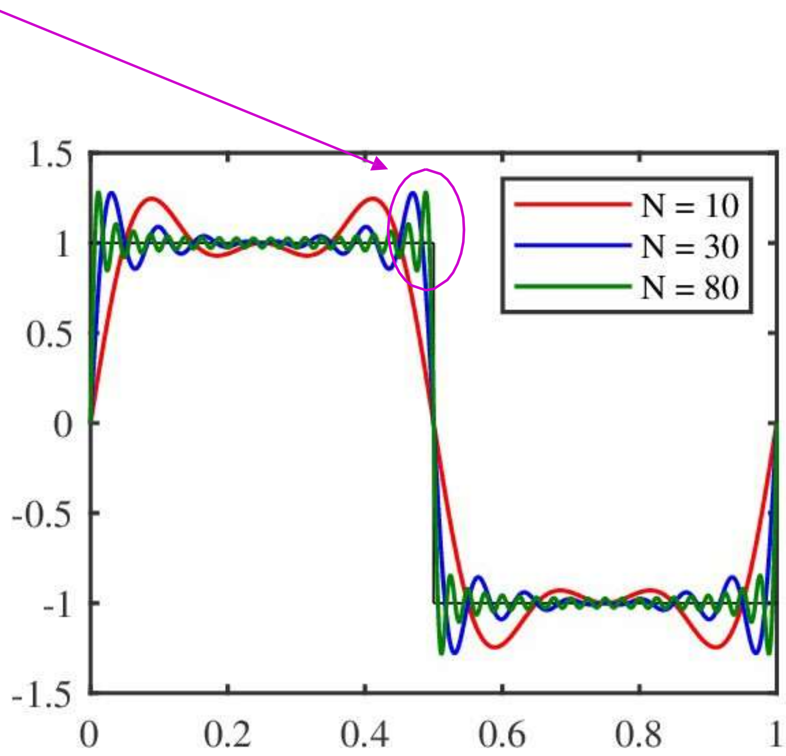


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fourier_Series.svg, auteur : Jim.belk

Culture

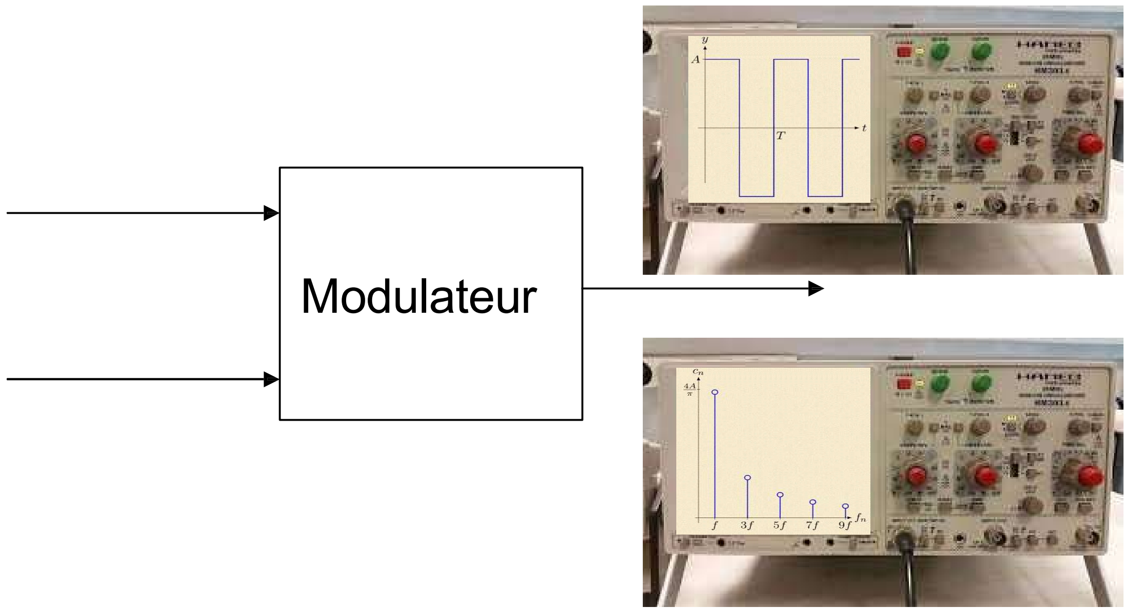
Phénomène de Gibbs :

- C'est l'oscillation forte aux abords de la discontinuité du signal
- Ici, c'est très visible pour la somme des 30 premières harmoniques



Source : https://www.researchgate.net/figure/Fourier-series-approximation-of-a-square-wave-N-is-the-number-of-number-of-terms-used-to_fig1_337768291

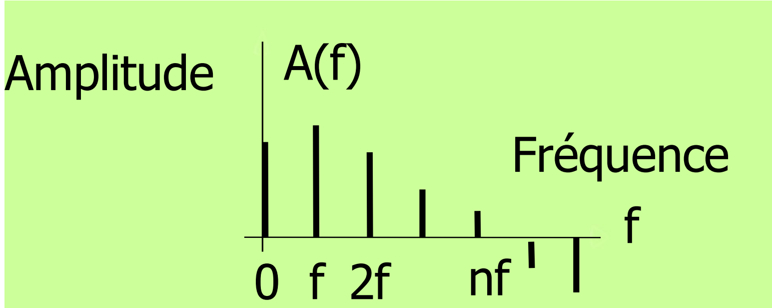
Ce qu'on a l'habitude de raisonner en signal d'ondes…



… Il faut raisonner en représentation spectrale

Représentation spectrale

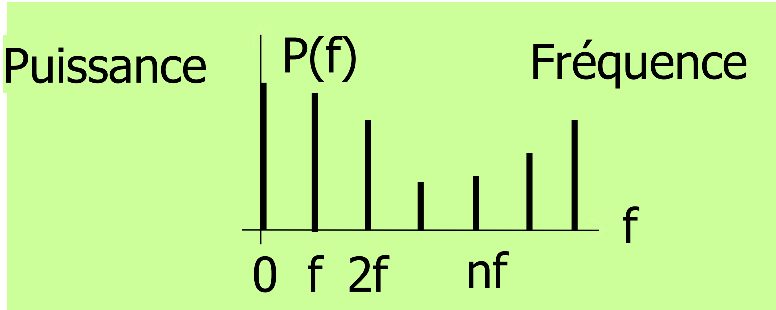
- **Spectre d'amplitude** : Représentation des amplitudes c_n en fonction des fréquences.
  - **Fonction périodique=> spectre de raies** : une raie est associée à chaque harmonique.



- **Spectre de puissance** : Représentation des puissances contenues dans les différentes harmoniques.

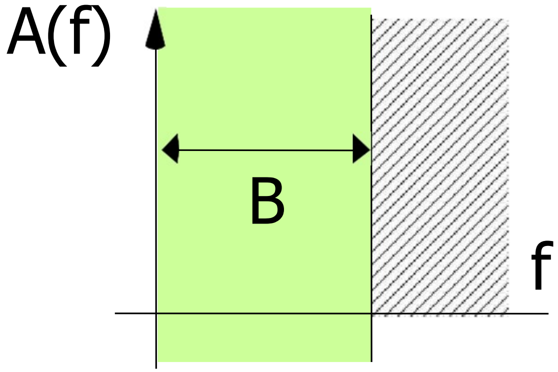
Puissance moyenne d'un signal

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)^2\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2$$

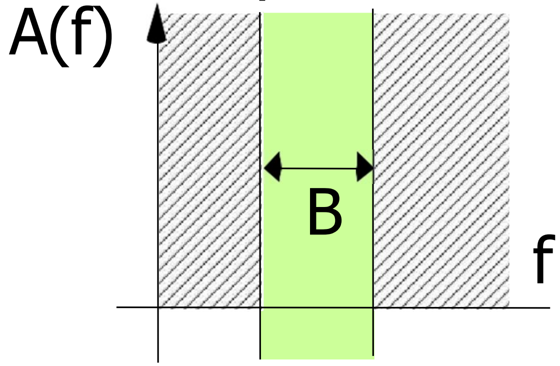


Première application de cette représentation

- **Lorsque l'on transmet un signal on le déforme** de manière différente selon les fréquences.
- **Déformation fondamentale** : on ne transmet jamais toutes les fréquences => **Les fréquences élevées disparaissent.**
- **Un canal se comporte comme un filtre.**
- **Exemple :** Bande passante réseau téléphonique commuté 300-3400 Hz



Filtre passe-bas



Filtre passe-bande

Cas où la fonction est non périodique

- La DSF n'est applicable qu'aux fonctions périodiques alors comment faire pour les fonctions non périodiques ?
- On considère alors que la période T est infinie ($f=1/T$) donc $f \rightarrow 0$:
  - Avec les fonctions périodiques, les harmoniques sont définies sur des multiples de f
  - L'écart entre les raies du spectre va donc tendre vers 0
  - La représentation spectrale devient une représentation continue

Cas où la fonction g(t) est non périodique

- On ne parle plus de Série de Fourier mais de **Transformée de Fourier** qui s'appuie sur l'**Intégrale de Fourier**
- Un signal **non périodique** peut être mis sous la forme d'une intégrale de fonction sinusoïdale:

$$g(t) = 1/\pi \int_{0}^{+\infty} S(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))d\omega$$

- **Spectre continu** : Pour toutes les fréquences f (avec $\omega=2\pi f$ la pulsation) on a :
  - une amplitude $S(\omega)$
  - une phase $\varphi(\omega)$

Quand la fonction étudiée n'est pas périodique…

… on laisse ça aux électroniciens !!!

Pour ceux qui voudraient creuser la transmission de données au niveau physique, il faut suivre ELE004 pour se mettre en condition, puis ELE103 puis éventuellement ELE112.

Atténuation & Bruit… il faut faire avec

Atténuation

- **Canal par nature imparfait** => chaque composante d'un signal est déformée de façon différente selon sa fréquence.
- Atténuation : Vis-à-vis d'un dispositif, elle exprime la relation entre les amplitudes et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée en fonction de la fréquence.
  - L'affaiblissement linéique **A(ω)** s'exprime en Népers (Np)/km.
  - Le déphasage linéique, ou encore retard de phase, **B(ω)** s'exprime en Radians(Rad).

  Ces deux valeurs définissent le coefficient d'atténuation subit par un signal lors d'une transmission
- **Modifications apportées au signal:** Si le signal g(t) est émis, le signal reçu est alors r(t):

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} S(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))\,d\omega$$

$$r(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} A(\omega)S(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega) + B(\omega))\,d\omega$$

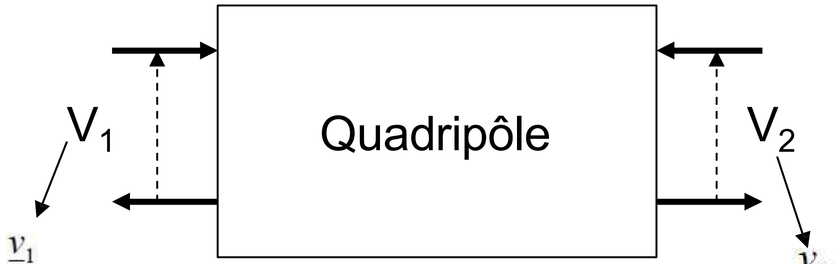
Une unité de mesure de la puissance : le décibel (dB)

- **Le décibel est la représentation en logarithme décimal** du rapport entre 2 puissances (meilleure échelle).
- **L'atténuation** (affaiblissement) **est une perte de puissance** qui s'exprime en décibels des puissances de sortie P_s sur entrée P_e:
- **Pour contrecarrer l'affaiblissement** on utilise des **amplificateurs** qui procurent une régénération du signal.
- Pour atténuation et amplification on parle de Gain, réciproquement négatif et positif
  - $G\ (dB) = 10*\log_{10}(P_s / P_e)$ ou encore
  - $G\ (dB) = 20*\log_{10}(U_S/U_E) \Rightarrow U_S = U_E x 10^{G/20}$ (U_S tension de sortie et U_E tension d'entrée)

Pour aller plus loin… il faut aller plus près

- Passer par la modélisation du support de transmission : c'est un filtre
- Un filtre se modélise pas une fonction de transfert qui est un assemblage de résistance(R), capacité(C) et inductance(L).
- On modélise soit temporellement soit fréquentiellement
- Ce qui mène au diagramme de Bode
- Le Gain (gain positif +dB) et la Perte (gain négatif –dB) y apparaissent

Quadripôle, Filtres et fonction de transfert



Représentations complexe des tensions V_1 et V_2

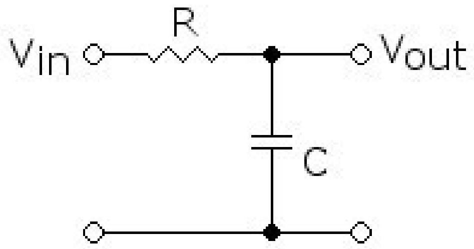
<=> Fonction de Transfert complexe ou transmittance : $\underline{\mathbf{T}}_V = |\underline{\mathbf{T}}_V| \exp(j\varphi)$

$|\underline{\mathbf{T}}_V|(\omega) = \frac{|\underline{v}_2|}{|\underline{v}_1|}$ auquel on préfère le Gain $G_V = 20\log_{10}|\underline{\mathbf{T}}_V|$ $\omega = 2\pi f$

$\varphi(\omega) = \arg(\underline{v}_2) - \arg(\underline{v}_1)$

- "Un filtre est un quadripôle transmettant un signal sans atténuation ou avec une atténuation de valeur donnée dans une bande de fréquences déterminée.
- Les filtres sont utilisés dans de nombreuses circonstances. Lorsqu'il s'agit, par exemple, de limiter la bande passante en entrée ou en sortie d'un montage, d'annuler certaines fréquences perturbatrices indésirables (50Hz par exemple ou ses harmoniques qui polluent le réseau de distribution électrique) ou au contraire de ne retenir qu'une bande de fréquences particulière, etc.
- **Les filtres passifs :** réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance et capacité). Ils ne permettent pas d'amplifier (la puissance de sortie est nécessairement inférieure à la puissance d'entrée)
- **Les filtres actifs :** réalisés à partir d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels, transistors et composants passifs. Ils nécessitent une alimentation spécifique. En contrepartie, ils permettent d'amplifier le signal."

source des informations qui ont inspiré ce transparent : cours ELE004, D. Le Ruyet 2007.



Omegatron-Travail personnel, CC BY-SA 3.0,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=80328

Filtre Passe Bas Passif

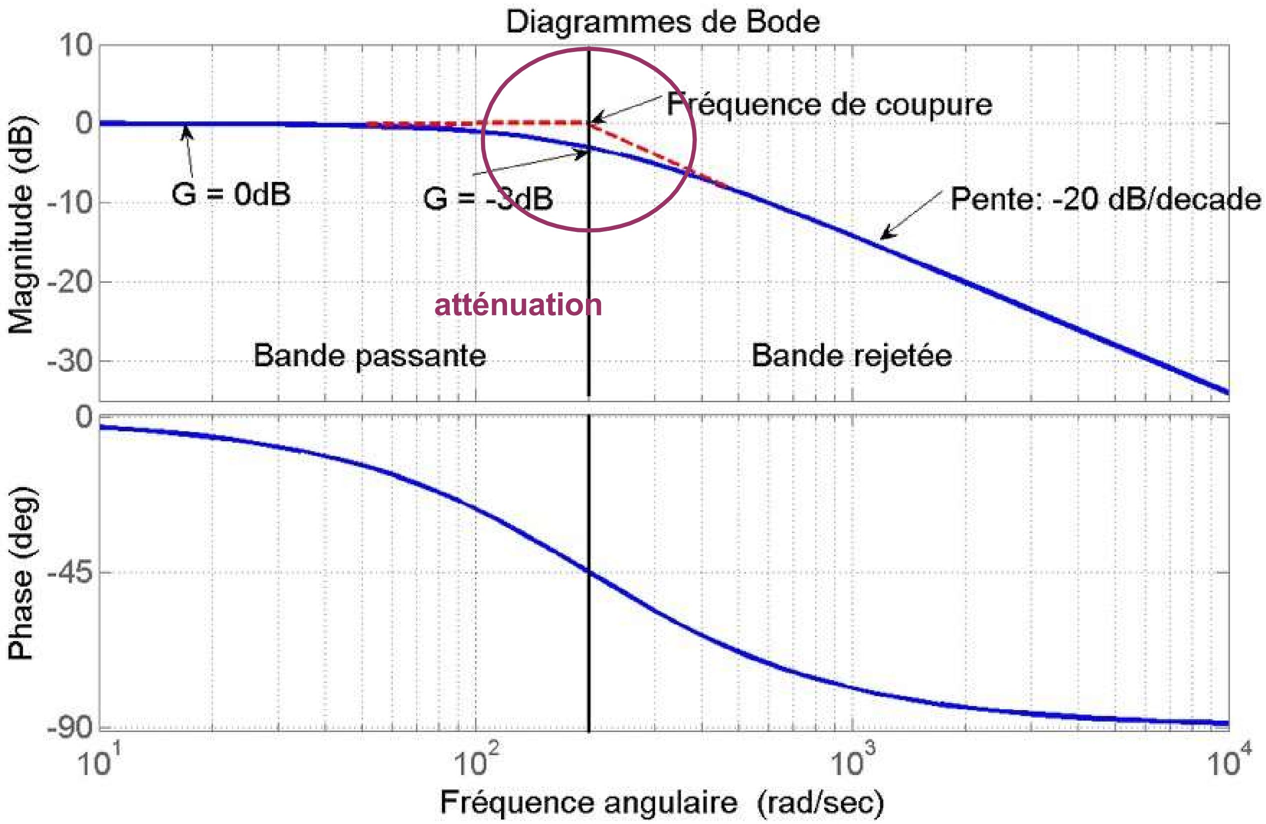
Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Bode

La pulsation $\omega=2\pi f$

Le diagramme de Bode d'un système de réponse fréquentielle $T(j\omega)$ est ainsi une représentation graphique composée de deux tracés :

- le gain (ou amplitude) en décibels (dB). Sa valeur est calculée à partir de $20\log_{10}(|T(j\omega)|)$.
- la phase en degré, donnée par $\arg(T(j\omega))$.

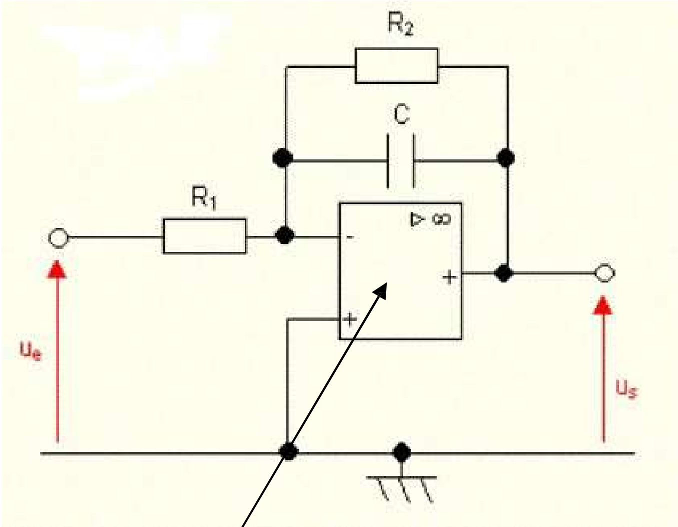
L'échelle des pulsations est logarithmique et est exprimée en rad/s (radian par seconde). L'échelle logarithmique permet un tracé très lisible, car composé majoritairement de tronçons linéaires.



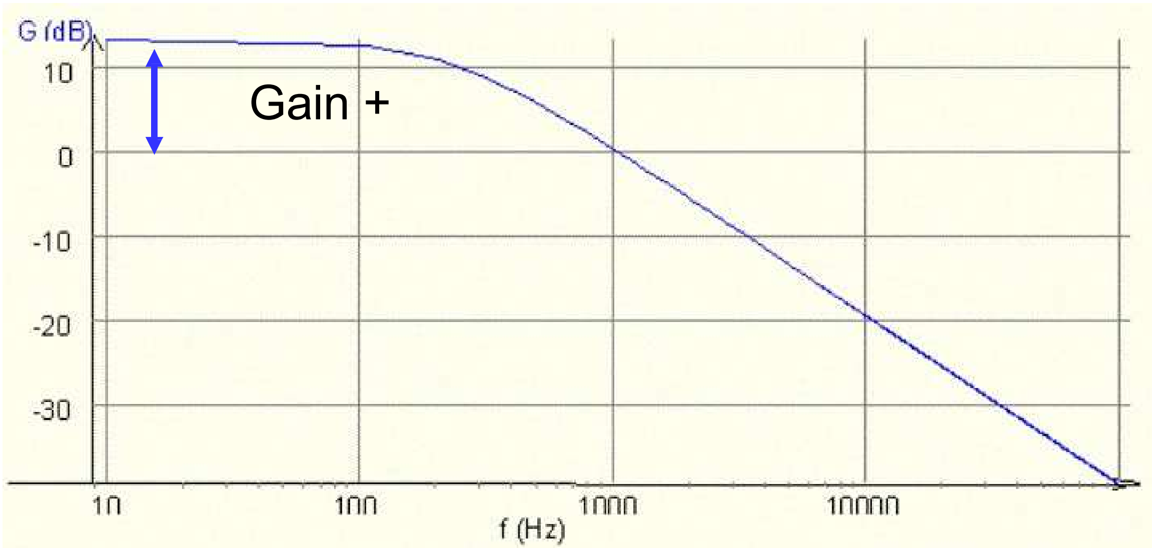
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FPBP1.png

Filtre Passe Bas Actif

http://sgbd.ac-poitiers.fr/bde/exos/98COU062/98COU062.htm (21/11/2020)

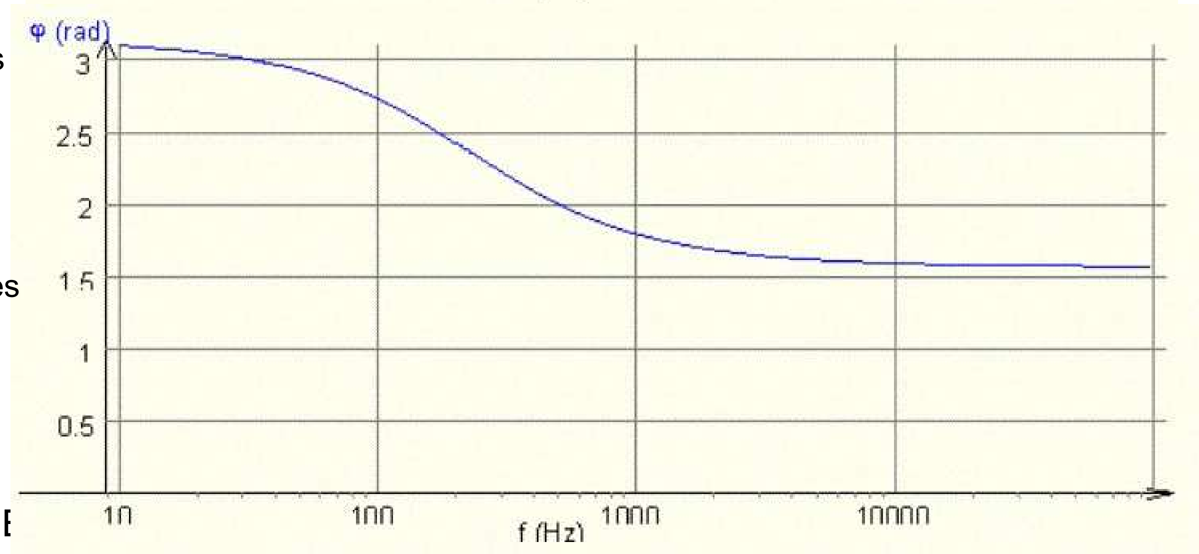


Amplificateur Opérationnel : sert à régénérer le signal



~172 degrés

~86 degrés

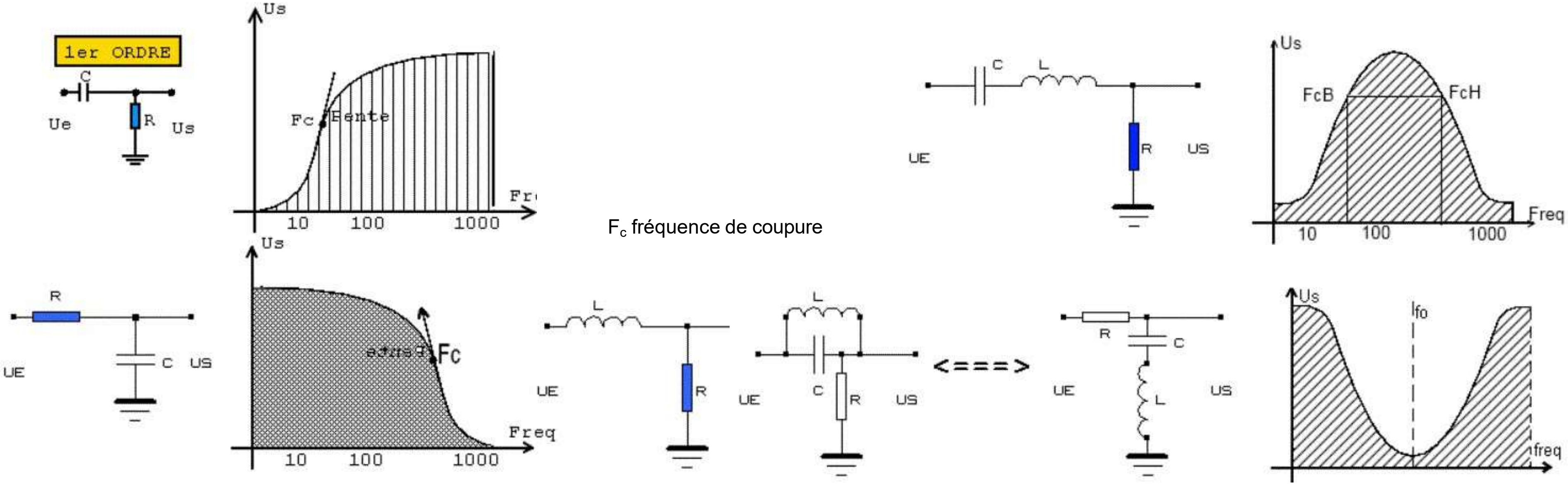


La source des informations est un exercice avec la correction en ligne pour ceux qui seraient intéressés

Cédric
le cnam

Types de filtres passifs

Courbes de réponse en fréquences de différents filtres passifs



source : https://fastoche.pagesperso-orange.fr/LesFiltres/LesfiltresPassifs.htm

Suivant l'allure de du diagramme de Bode en gain, c'est à dire la courbe G en fonction de la fréquence f, on donne un nom au quadripôle. On distingue 4 circuits classiques :

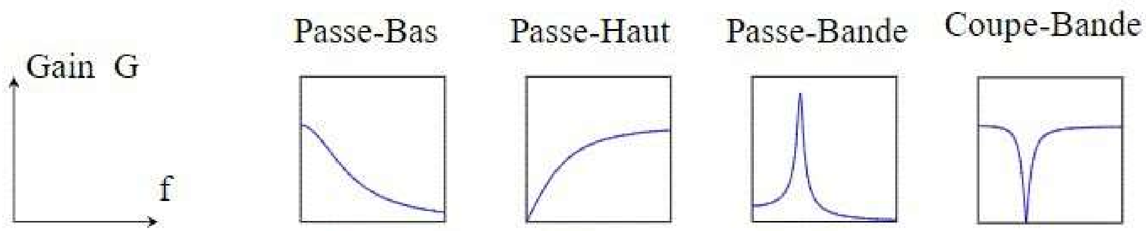


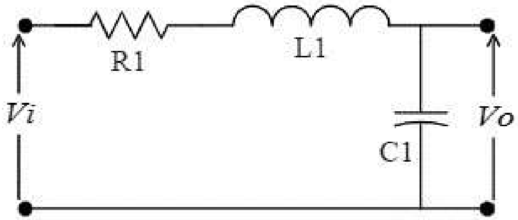
Figure 25 - Les différents types de filtre

Source : http://www.physagreg.fr/electrocinetique_fourier_transfert_filtres_electriques.php (22/11/2020)

Cédric
le cnam

Ordre des filtres

- On peut combiner plusieurs composants voire filtres pour modéliser l'effet d'un support de transmission ou d'un circuit… de nouveaux phénomènes apparaissent.
- Le nombre de composants combinés fait augmenter l'ordre du filtre
- Exemple de filtre passe bas d'ordre 2 :

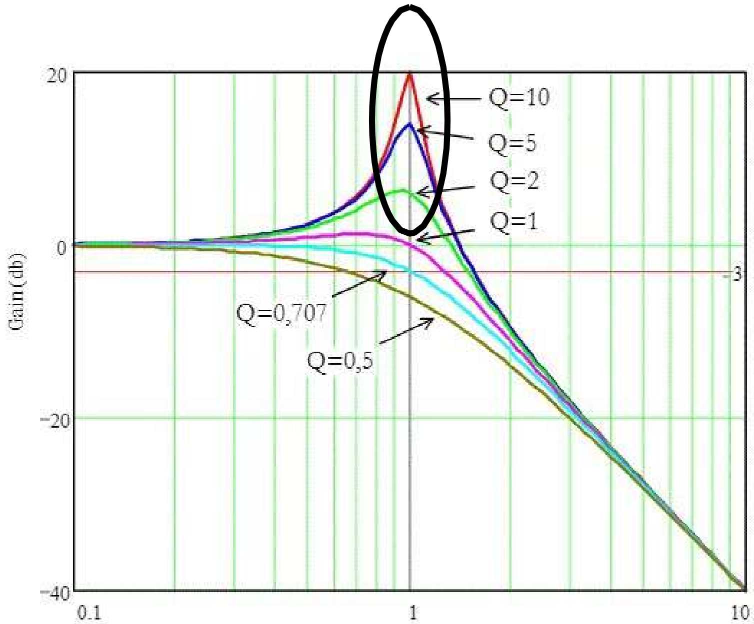


$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}}$$

$$Q = \frac{1}{R_1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

F_0 fréquence & Q facteur de Qualité du filtre, plus il est élevé plus il résonne et plus il est sélectif… plus la bande de fréquences qui passe est étroite.

résonance

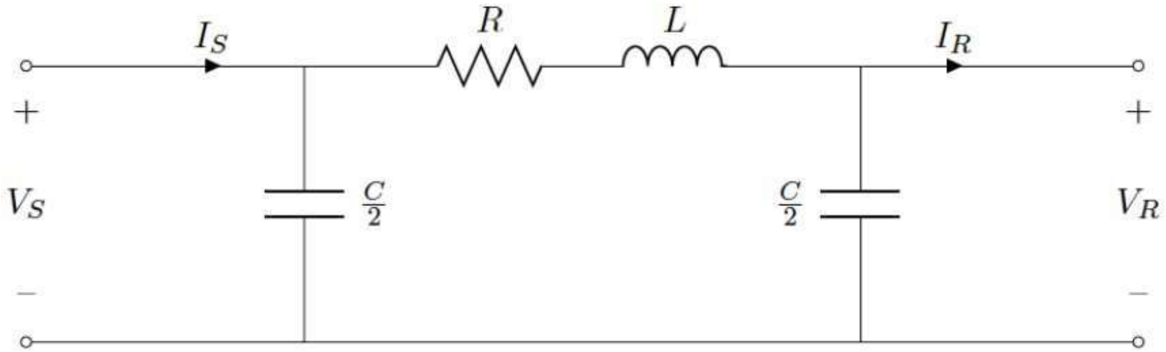


Source des dessins : Filtres passe bas. Jude Levasseur. Oct. 06.

Modélisation de cable sous-marin : 1 modèle parmi plusieurs issu du cours du prof JL. Thomas

Cable Technology – Geometric Models

π – equivalent Model



$$Z = (R + j\omega L)l$$

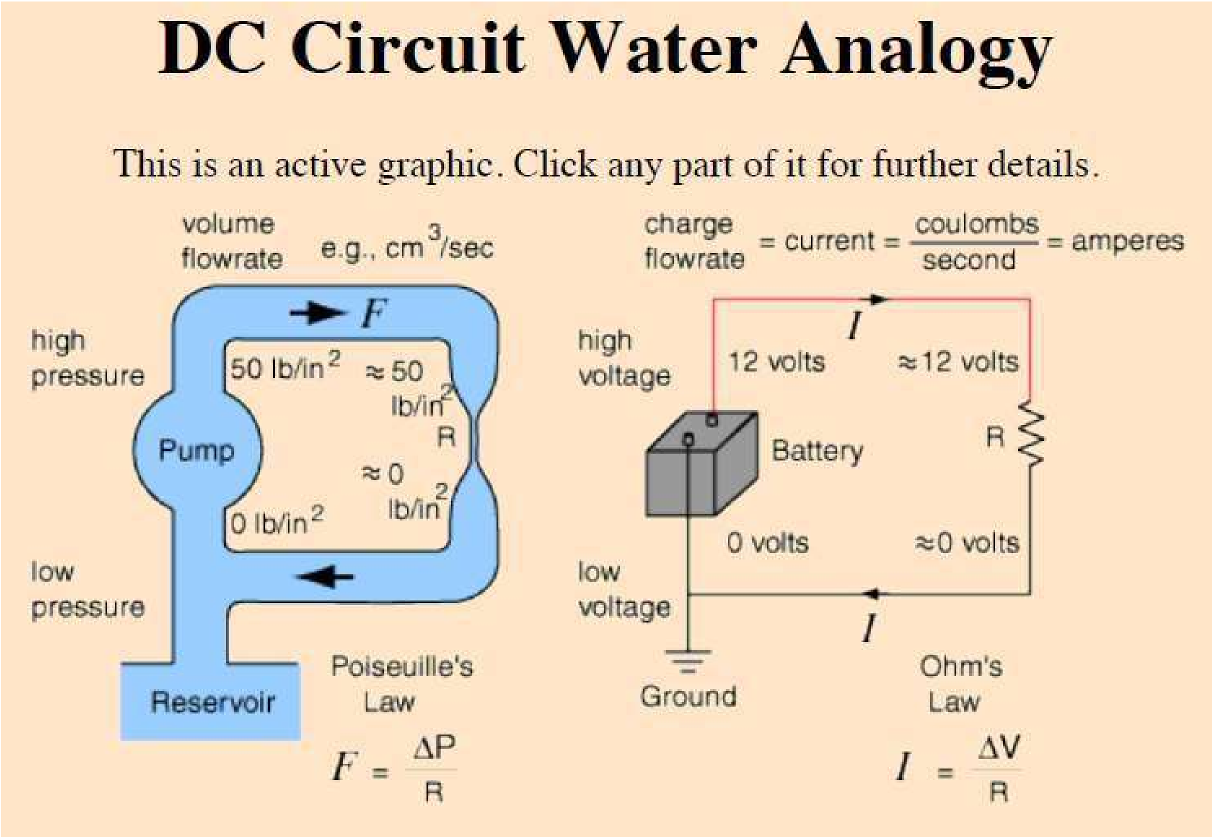
$$Y = (G + j\omega C)l$$

Source : Henrik Waje-Andreassen – NTNU Thesis

Attention^2 !!!

- L'électronique, l'automatisme, l'électricité, l'acoustique et peut-être même l'hydraulique utilisent les mêmes théories mais pas avec les mêmes finalités… croiser les informations n'est pas toujours simple en fonction des sources.
- Le contexte peut nécessiter des concepts différents/complémentaires.

Exemple d'analogie transdisciplinaire



Source : http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/watcir.html partagée par le professeur Cnam JL Thomas (électrotechnique)

Résultat d’échantillonnage de Nyquist-Shannon

- **B La largeur de bande d'un filtre en hertz** : on transmet un signal au travers de ce filtre.
- **R La rapidité de modulation en ‘bauds’** : le nombre d'intervalles élémentaires par unité de temps (secondes) qui permettent l'échange d‘un échantillon (d’un symbole).
- **V La valence d'un signal échantillonné :** le nombre de symboles différents qui peuvent être distingués par intervalle.
- **Q La quantité d'information par intervalle** en ‘**bits**’

$$Q = \log_2 V$$

- **C Le débit maximum d'informations en ‘bits/seconde’**

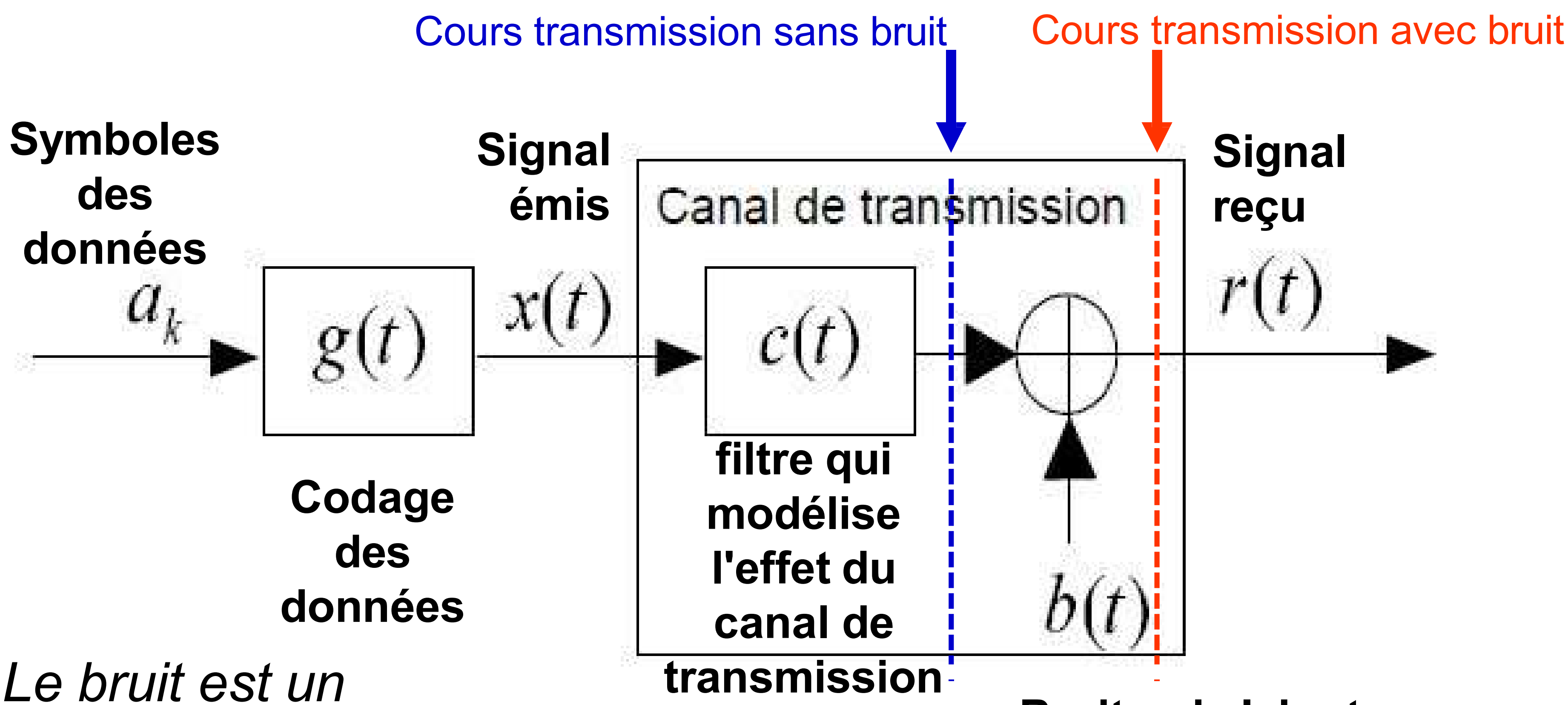
$$\boxed{C = R \log_2 V = 2B \log_2 V}$$

Interprétation de Nyquist- Shannon

- **Théorème d'échantillonnage**
  - Un signal peut (théoriquement) être reconstruit à partir d'une fréquence d'échantillonnage égale à deux fois la largeur de bande (deux fois la fréquence maximale du signal pour un filtre passe-bas).
  - Réciproquement, l'échantillonnage avec des échantillons régulièrement espacés peut décrire un signal à condition qu'il ne contienne aucune fréquence supérieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage dite fréquence de Nyquist (Wikipedia)
  - Soit encore : toutes les fréquences inférieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage peuvent être exactement restituées.
    - Exemple : Le son CD est échantillonné 44100 fois par seconde => on ne peut restituer correctement que les fréquences de 0 à 22050 Hz.

- **Résultat : débit maximum** pour un signal à support de largeur de bande B.
  - Le débit maximum théorique est atteint pour R = 2B (en échantillonnant 2B fois par unité de temps on atteint le débit maximum).
  - Dans une bande B pour augmenter le débit au il faut augmenter V la valence (le nombre de symboles par intervalles élémentaires).

Modélisation du bruit dans les transmissions

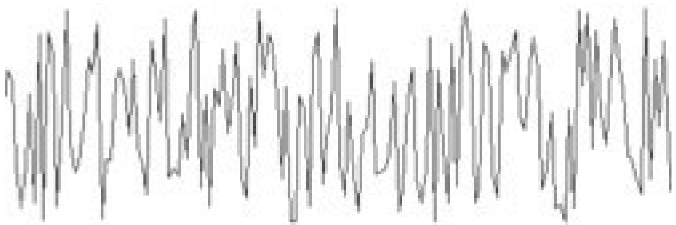


Le bruit est un phénomène différent de l'atténuation vue précédemment.

Bruit qui s'ajoute au signal traversant le canal (Bruit Blanc Gaussien)

Transmission en présence de bruit

- **Objectif de la théorie de l'information de Shannon**
  - Modéliser un canal soumis à un bruit additif.
  - Déterminer la capacité maximum de transmission d'un canal

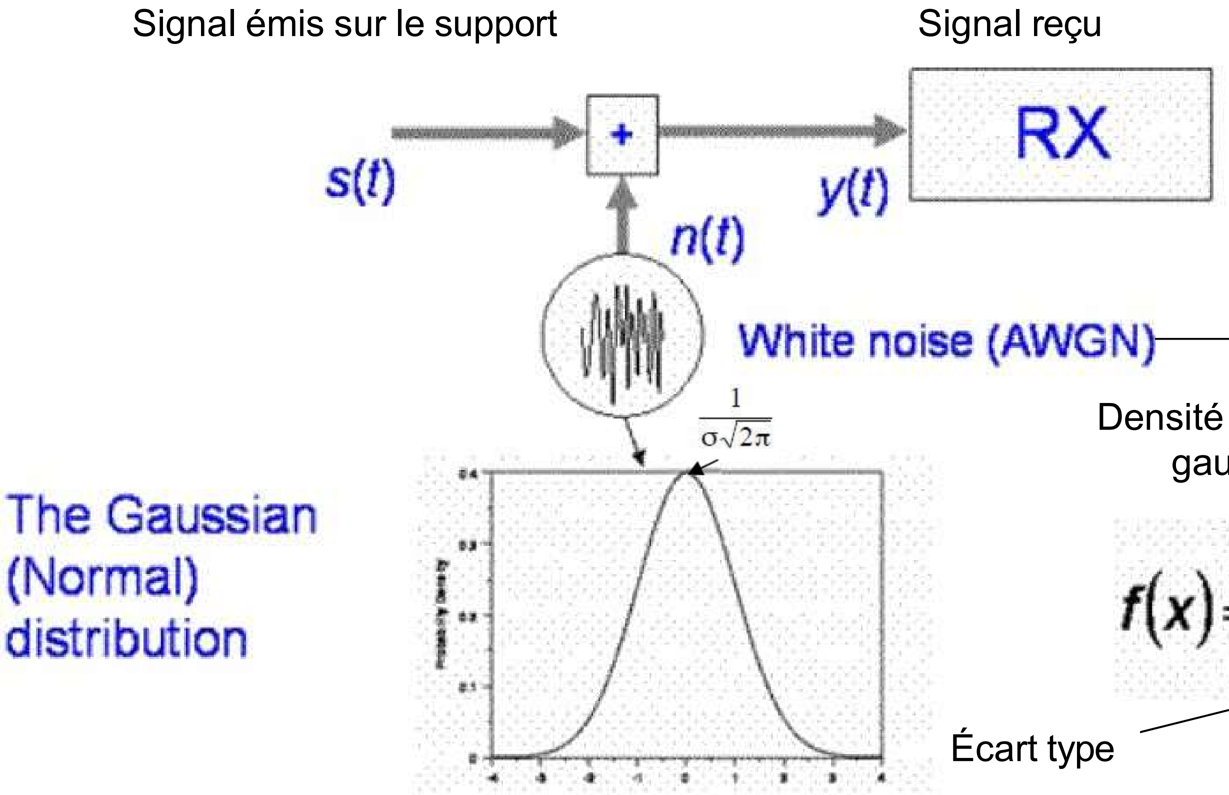


- **Origine des bruits**
  - **Thermiques :** Bruit de fond des résistances, le principal semble-t-il.
  - **Diaphoniques :** Influence permanente d'un conducteur sur un autre.
  - **Impulsionels :** Influences transitoires des impulsions
  - **Harmoniques :** Phénomènes de battements, de réflexions.

Bruit Blanc Aditif Gaussien (BBAG)

- Pratique pour modéliser des phénomènes de perturbation d'une transmission.
  - Additif : il s'ajoute au signal transmis
  - Blanc : il est uniforme sur toute la largeur de bande du signal
  - Gaussien : c'est un signal aléatoire dont la distribution suit une loi normale

Modélisation du BBAG



Dépend de la puissance du bruit et de la Bande Passante du support

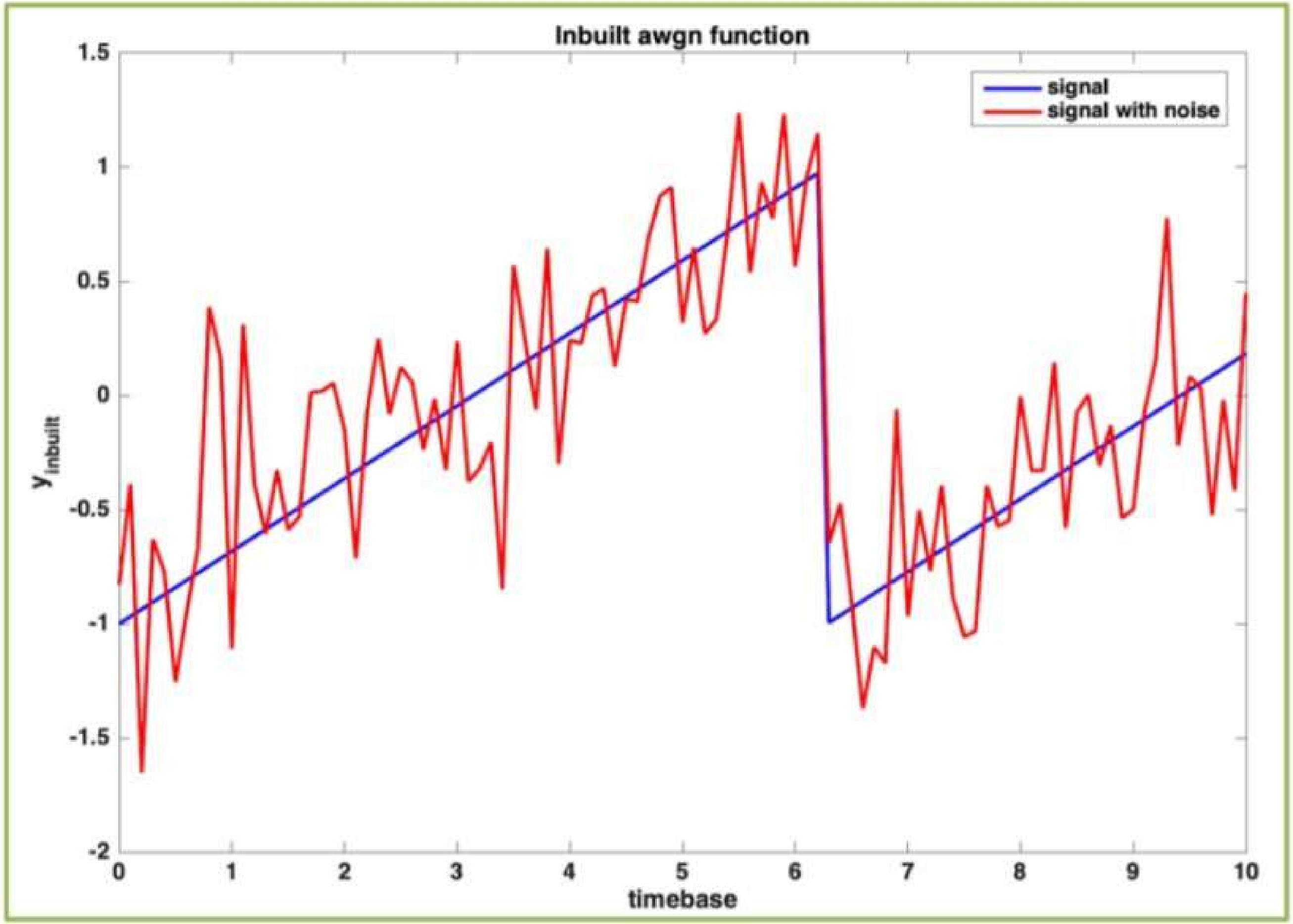
Densité de probabilité gaussienne :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Moyenne

Écart type

Source : http://www.mike-willis.com/Tutorial/PF14.htm (09/12/2020)



Source : http://oaji.net/articles/2020/1486-1587028880.pdf (10/12/2020). Reconstruction à l'aide de Matlab d'un signal en dent de scie, déformé par une fonction qui représente un BBAG, tel que le ratio Signal/Bruit est de 5dB.

Entropie d'une source

- **Hypothèses :**
  - Une source émet des messages (ou symboles) pris dans un ensemble (un alphabet) donné fini (cas infini non traité dans le cours)

$$X = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots, x_M$$

  - Les messages émis sont aléatoires sinon il n'y a pas de communication d'information => Ensemble des **probabilités a priori**

$$p(x_1), p(x_2), p(x_3), \ldots, p(x_k), \ldots, p(x_M)$$

- **L'entropie d'une source H** : c'est la quantité d'information moyenne apportée par la source
  - Quantité d'information apportée par le message k : $-\log_2 p(x_k)$
  - Quantité moyenne : espérance mathématique pour tous les messages possibles de la source:

$$H = -\sum_{k=1}^{M} p(x_k) \log_2 p(x_k)$$

Influence du bruit: probabilités a posteriori

- **Le récepteur reçoit des messages** qui appartiennent à un ensemble qui n'est pas nécessairement identique à celui émis par la source.

$$Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_N$$

- **Le bruit intervient pour modifier un message** émis x_k en un message reçu y_i selon une probabilité **a posteriori** (probabilité conditionnelle) : la probabilité que l'émetteur ait envoyé x_k sachant que le récepteur a vu arriver yi

$$p(x_k / y_i)$$

Information mutuelle et capacité d’un canal

- **Information mutuelle de deux messages émis et reçus**
  - La quantité d'information apportée lorsqu'on reçoit y_i alors que x_k a été émis:

$$I(x_k, y_i) = \log_2(\frac{p(x_k / y_i)}{p(x_k)})$$

- Exemples: Si y_i et x_k sont indépendants $I(x_k, y_i)=0$

  Si $p(x_k/y_i)=1$ on retrouve $-\log_2(p(x_k))$

- **Information mutuelle moyenne** : source/destinataire

$$I(X,Y) = \sum_X \sum_Y p(x_k et \;\; y_i) I(x_k, y_i)$$

- **Capacité d'un canal** : La valeur maximum de l'information mutuelle moyenne sur toutes les distributions a priori.

$$C = \max_{p(x_k)} I(X,Y)$$

Modèle de Shannon

Information
Mutuelle
entre la
source et le
destinataire
des données

Entropie de
la source des
mots du code

FIG. 6.6 – système de communication avec codage de canal

Entropie de
la source des
données

Information
Mutuelle
entre le
codeur
source et le
décodeur
destinataire

Résultats de Shannon

- **Premier résultat de Shannon : une source n'est caractérisée que par son entropie.**
  - On ne change rien sur l'information générée par la source en changeant de codage.
  - La seule mesure de l’information qui compte est l’entropie (son débit en bit/unité de temps).
- **Second résultat de Shannon : débit maximum C**
  - **Si H≤C** il existe une codification des messages qui sur une période suffisamment longue permet de transmettre les messages avec une probabilité d'erreur résiduelle aussi faible que l'on veut.
  - **Si H>C** il n'existe pas de codification qui assure sur une période de durée arbitraire une transmission sans erreurs.

Interprétation de Shannon

- **Dans le premier cas : capacité du canal excédentaire**
  - Sur une longue période cet excédent est **important.**
  - Il permet d'ajouter des **redondances** (sans changer l'entropie de la source) => On peut générer des codes correcteurs d'erreur aussi efficaces que l'on veut.
  - On abaisse ainsi le taux d'erreur résiduel **arbitrairement.**
- **Dans le second cas : capacité du canal déficitaire**
  - Sur une période courte on peut transmettre correctement mais ensuite on aura des erreurs non corrigées.
  - Avant ce résultat on pouvait penser que le bruit introduisait une borne **infranchissable** sur le taux d'erreur résiduel.
  - Shannon montre que le **bruit intervient sur le débit du canal et non sur sa précision.**

Comment obtenir un débit élevé

- Pour **augmenter** le débit d'un canal à taux d'erreur donné on peut :
  - **Augmenter la complexité de codage** des équipements terminaux pour se placer au plus près de la capacité maximale (des limites du théorème Sh-Ny).
  - **Augmenter la capacité du canal** (bande passante, puissance) en conservant des techniques de codage simples.
  - **Jouer sur les deux aspects.**

Résultat particulier de Shannon

- **Canal de bande passante limitée** : B.
- **Puissance moyenne du signal** : S
- **Puissance moyenne d'un bruit additif** : N.
  - **Bruit blanc**: énergie répartie de façon uniforme sur le spectre
  - **Gaussien**: l'apparition d'un bruit suit une loi de Gauss.

$$C = B \log_2 (1 + \frac{S}{N})$$

- **Exemple**:

  Soit B= 3100 Hz;

  soit un bruit de puissance 20db $10 \log_{10} S/N = 20$ db => S/N = 100

  C = 3100 * 6,6 = 20600 b/s

- **Remarque**: Dans le cas précédent, Shannon montre que le nombre de niveaux max V qui peuvent être discriminés est donné par:

$$2B \log_2 V = B \log_2 (1 + S/N)$$

D'où

$$V = \sqrt{1 + \frac{S}{N}}$$