Loi binomiale

Utilisations de la loi binomiale

On utilise principalement la loi binomiale dans la situation suivante :
on a une **répétition de n épreuves indépendantes** pour lesquelles on a défini deux issues possibles (l'une appelée "Succès" et l'autre "Echec").
Une telle épreuve est appelée "épreuve de Bernoulli".

On note p **la probabilité de succès à chaque épreuve.**
Si la variable aléatoire X associe, à chaque répétition de n épreuves, le **nombre de succès au cours de ces n épreuves**, alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Cette loi est notée $\mathcal{B}\,(n;p)$.

Exemple :

8 % des pièces fabriquées par une machine sont défectueuses .
On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 7 pièces prélevées avec remise, associe le nombre de pièces acceptables dans cet échantillon.
Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

Le tirage d'un échantillon de 7 pièces avec remise correspond à une succession de 7 tirages indépendants d'**une** pièce.
Chaque tirage d'une pièce est une "épreuve".
X correspond au nombre de pièces acceptables. On appelle donc **"succès"** le fait qu'une pièce soit **acceptable**.
La **probabilité de succès** est donc **0.92** à chaque épreuve. X est alors le **nombre de succès au cours de 7 épreuves indépendantes.**
Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(7;0.92)$.

Calcul d'une probabilité

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(n;p)$, alors :

- les valeurs possibles de X sont les entiers compris entre 0 et n
- pour tout entier k compris entre 0 et n, on a : $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$

ou (autre notation) : $p(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Exemple :

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20;0.5)$.

Calculer $P(X=17)$ à 10^{-4} près.

$P(X=17)=\binom{20}{17}\times 0.5^{17}\times(1-0.5)^{20-17}=1140\times 0.5^{17}\times 0.5^3\approx 0.0011$.

Cumul de probabilités

Les valeurs possibles de X étant les entiers de 0 à n, pour calculer $P(X\leq k)$ pour un entier k compris entre 0 et n, on peut utiliser :
$P(X\leq k)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=k)$.

Mais on peut également utiliser l'événement contraire :
$P(X\leq k)=1-[P(X=k+1)+\ldots+P(X=n)]$
On choisira bien entendu le calcul le plus court !

Avec des inégalités strictes, on aura par exemple :
$P(X<k)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\ldots+P(X=k-1)$

Exemple :

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(19;0.91)$.

Calculer, à 10^{-4} près, P(X < 17).

On a le choix entre le calcul direct :

P(X < 17) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15) + P(X = 16)

et le calcul utilisant l'événement contraire :

P(X < 17) = 1 - [P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19)] .

On choisira donc le deuxième calcul qui donne :
P(X < 17) = 1 - [P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19)] =
$1-[C_{19}^{17}(0.91)^{17}(0.09)^{19-17}+C_{19}^{18}(0.91)^{18}(0.09)^{19-18}+C_{19}^{19}(0.91)^{19}(0.09)^{19-19}]\approx 0.2415$

Espérance et écart type d'une loi binomiale

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\ (n;p)$, alors son espérance est : $E(X)=np$ et son écart type est : $\sigma_X=\sqrt{np(1-p)}$.

Exemple :

8 % des pièces fabriquées par une machine sont défectueuses .

On appelle X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 10 pièces prélevées avec remise, associe le nombre de pièces acceptables dans cet échantillon.

- X suit la loi binomiale $B($ ____ ; ____).
- Calculer à 10^{-4} près : $p(X=5)$ = ____ .
- Pour obtenir la probabilité d'avoir au moins 2 pièces défectueuses parmi les 10 pièces tirées, on doit calculer la probabilité de l'événement :

  X choisir ▾ ____

  Cette probabilité est égale à ____ (valeur approchée à 10^{-4} près).
- L'espérance de X est égale à ____ et son écart type est égal à ____ (valeur approchée à 10^{-4} près).

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\ (10;0.85)$.

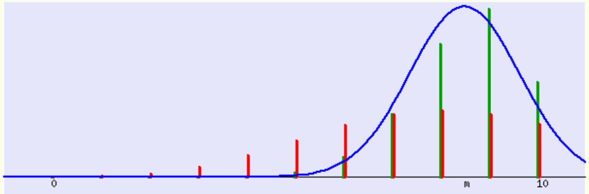
Y est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de même espérance que X.
Y suit donc la loi de Poisson de paramètre $m=10\times0.85=8.5$.

Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale de même espérance et de même écart type que X.
Z suit donc la loi normale de paramètres $m=10\times0.85=8.5$ et $\sigma=\sqrt{10\times0.85\times(1-0.85)}=1.129159$.

Ces trois lois sont représentées ci dessous. La loi binomiale et la loi de Poisson (discrètes) sous forme de diagramme en bâtons, la loi normale (continue) sous forme de courbe (fonction de densité).

- **En vert : la loi de X (loi binomiale).**
- **En rouge (et légèrement décalée pour une meilleure lisibilité) : la loi de Y (loi de Poisson).**
- **En bleu : la loi de Z (loi normale).**

Pour certaines valeurs de n et p, on observe que la loi de Poisson ou la loi normale est proche de la loi binomiale.



Ecart maximum entre la loi **binomiale** et la loi de **Poisson** : 0.21755681 **> 0.01**
Ecart maximum entre la loi **binomiale** et la loi **normale** : 0.036190793 **> 0.01**

Dans ce cas, la loi binomiale ne peut être approchée par aucune de ces deux lois.

Exemple :

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 140 et 1/280.

Les conditions sont remplies pour pouvoir approcher cette loi par une loi de Poisson.

Le paramètre de la loi de Poisson qui permet d'approcher la loi de X est