Chapitre 1

Introduction : probabilité sur un espace fini

Historiquement, le calcul des probabilités s'est développé à partir du XVII$^{\text{e}}$ siècle autour des problèmes de jeux dans des situations où le nombre de cas possibles est fini. Les développements plus récents concernant des espaces non nécessairement finis nécessitent les outils techniques de la théorie de la mesure. Mais on peut introduire simplement sur les espaces finis toutes les notions importantes de probabilités sans avoir besoin de cet outillage.

1.1 Probabilité sur un espace fini, événements

1.1.1 Définitions

On s'intéresse à une expérience aléatoire qui conduit à la réalisation d'un seul résultat parmi un nombre fini de résultats possibles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble de ces résultats.

Exemple 1.1.1. — Jet d'une pièce à pile où face : $\Omega = \{P, F\}$.
— Jet d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si on mesure la fréquence d'apparition du résultat ω_k au cours d'un grand nombre de répétitions de l'expérience i.e. on calcule le rapport $F_k = \frac{N_k}{N}$ du nombre N_k d'expériences dont le résultat est ω_k sur le nombre total d'expériences N, on constate qu'elle fluctue de moins en moins. La limite $p_k \geq 0$ de F_k lorsque $N \to +\infty$ correspond à la notion intuitive de probabilité.

On appelle événement une partie A de Ω. La fréquence de A c'est-à-dire la proportion d'expériences dont le résultat est dans A est égale à $\sum_{k:\omega_k \in A} F_k$. On est donc amené à associer la probabilité $\sum_{k:\omega_k \in A} p_k$ à l'événement A.
Comme la fréquence de Ω vaut 1, en passant à la limite, on obtient $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Définition 1.1.2. *Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ est une pondération $p_1, p_2, \dots, p_n$ des éléments de cet ensemble t.q.*

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ p_k \geq 0 \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

On attribue à tout événement $A \subset \Omega$ le nombre

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k$$

qui est appelé probabilité de l'événement A.

Exemple 1.1.3. Jet de deux dés à six faces : $\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ où i désigne la valeur de la face supérieure du premier dé et j celle du second.
Pour des raisons de symétrie (si les dés ne sont pas pipés), on munit Ω de la pondération suivante :

$$\forall 1 \leq i,j \leq 6,\ p_{(i,j)} = \frac{1}{36}.$$

Soit A l'événement : les valeurs des deux dés sont identiques.

$$A = \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} p_{(i,i)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

On note S la somme des deux dés et $\{S = k\}$ l'événement $\{(i,j) : S(i,j) = k\}$. On a $S(i,j) = i + j$. Donc

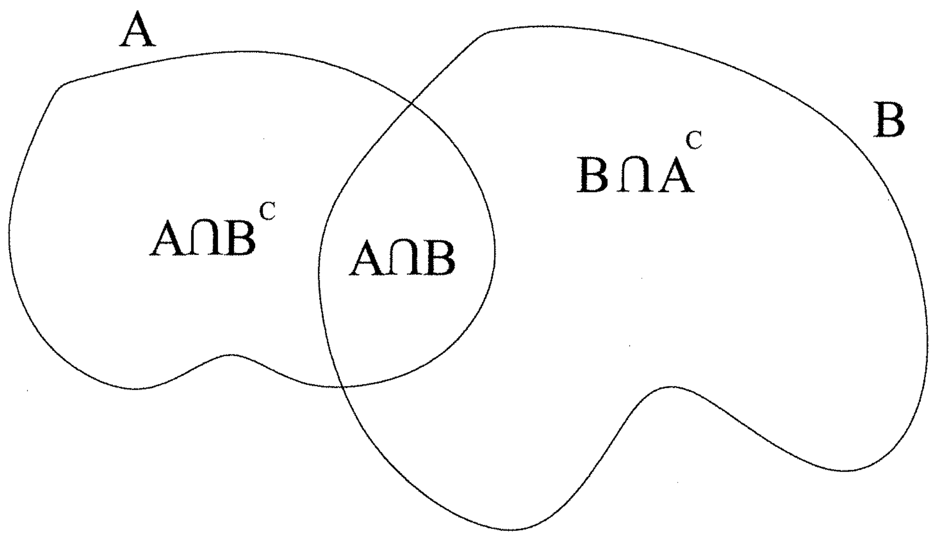
$$\begin{array}{lll}
\{S=2\} & = \{(1,1)\} & \mathbb{P}(S=2) = 1/36 \\
\{S=3\} & = \{(1,2),(2,1)\} & \mathbb{P}(S=3) = 1/18 \\
\{S=4\} & = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} & \mathbb{P}(S=4) = 1/12 \\
\{S=5\} & = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} & \mathbb{P}(S=5) = 1/9 \\
\{S=6\} & = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} & \mathbb{P}(S=6) = 5/36 \\
\{S=7\} & = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} & \mathbb{P}(S=7) = 1/6 \\
\{S=8\} & = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} & \mathbb{P}(S=8) = 5/36 \\
\{S=9\} & = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} & \mathbb{P}(S=9) = 1/9 \\
\{S=10\} & = \{(4,6),(5,5),(6,4)\} & \mathbb{P}(S=10) = 1/12 \\
\{S=11\} & = \{(5,6),(6,5)\} & \mathbb{P}(S=11) = 1/18 \\
\{S=12\} & = \{(6,6)\} & \mathbb{P}(S=12) = 1/36
\end{array}$$

Terminologie concernant les événements :

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, l'événement A est dit négligeable.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, il est dit presque sûr.
- On appelle événement contraire de A et on note A^c l'événement $\Omega \setminus A$.
- Si $A, B \subset \Omega$, l'événement A et B (réalisé lorsque A et B le sont) est noté $A \cap B$.
- L'événement A ou B (réalisé lorsque A ou B le sont) est noté $A \cup B$.

Probabilité de l'événement $A \cup B$:

Par définition, $\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{k:\omega_k \in A \cup B} p_k$. Comme $A \cup B$ est égal à l'union disjointe



$(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B) &= \sum_{k:\omega_k\in A\cap B^c} p_k + \sum_{k:\omega_k\in A\cap B} p_k + \sum_{k:\omega_k\in A^c\cap B} p_k \\ &= \left(\sum_{k:\omega_k\in A\cap B^c} p_k + \sum_{k:\omega_k\in A\cap B} p_k\right) + \left(\sum_{k:\omega_k\in A^c\cap B} p_k + \sum_{k:\omega_k\in A\cap B} p_k\right) - \sum_{k:\omega_k\in A\cap B} p_k \\ &= \sum_{k:\omega_k\in A} p_k + \sum_{k:\omega_k\in B} p_k - \sum_{k:\omega_k\in A\cap B} p_k \\ &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).}$$

Fonction indicatrice :

On appelle fonction indicatrice de l'événement A la fonction $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall\omega\in\Omega,\ 1_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si } \omega\in A\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exercice 1.1.4. Quel est l'événement $\{\omega : 1_A(\omega)\times 1_B(\omega)=1\}$ que l'on note aussi de façon condensée $\{1_A\times 1_B=1\}$?
Conclure que

$$\boxed{1_{A\cap B}=1_A\times 1_B.}$$

Montrer également que

$$\boxed{1_{A^c}=1-1_A \quad \text{et} \quad 1_{A\cup B}=1_A+1_B-1_{A\cap B}.}$$

1.1.2 Probabilités uniformes

Dans le cas où les symétries font que tous les résultats possibles $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ jouent le même rôle, ces résultats doivent avoir la même pondération $1/\text{Card}\,(\Omega)$. On dit alors qu'il sont équiprobables.
On a alors pour tout événement $A \subset \Omega$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} \frac{1}{\text{Card}\,(\Omega)} = \frac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(\Omega)}.}$$

Cette probabilité $\mathbb{P}$ s'appelle *probabilité uniforme* sur Ω.

Exemple 1.1.5. Dans le cas du jet de deux dés non pipés, $\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$ est muni de la probabilité uniforme.

Remarque 1.1.6. Si on s'intéresse à la somme des deux dés, on peut choisir $\Omega = \{2, 3, 4 \dots, 12\}$, ensemble des valeurs prises par cette somme. Mais faute de propriétés de symétrie, on ne sait pas munir cet espace d'une probabilité naturelle.
Dans l'exemple 1.1.3, en travaillant sur l'espace plus gros $\{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$ des couples des valeurs des deux dés muni de la probabilité uniforme, nous avons pu construire la pondération naturelle sur les valeurs de la somme des deux dés. Cette pondération n'a rien d'uniforme.
Cet exemple permet de bien comprendre l'importance du choix de l'espace de probabilité sur lequel on travaille.

Dans le cas des probabilités uniformes, les calculs se ramènent à du dénombrement.

Rappels de dénombrement

On se donne $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \le n$.

— Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

— De façon plus générale, le nombre d'injections d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments est

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).}$$

Le facteur n (resp. $n-1$,..., resp. $n-k+1$) vient du choix de l'image du 1er (resp 2e,..., ke) élément.

— Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

Exercice résolu 1.1.7. *Dans une classe de $n \le 365$ élèves, quelle est la probabilité de l'événement : "2 élèves au moins sont nés le même jour" que l'on note A ?*

On choisit comme espace de probabilité $\Omega = \{f : [1,n] \to [1,365]\}$ où pour $1 \leq i \leq n$, $f(i)$ représente le jour d'anniversaire du $i$ème élève dans l'ordre alphabétique.
Même si les naissances ne sont pas vraiment équiréparties au long de l'année, on munit Ω de la probabilité uniforme. On a Card $(\Omega) = 365^n$.
Pour calculer la probabilité de A, on peut calculer la probabilité de l'événement contraire A^c : "tous les élèves ont des dates d'anniversaire différentes". En effet comme $A \cup A^c = \Omega$ et $A \cap A^c = \emptyset$,

$$\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(A \cap A^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c).$$

On a $A^c = \{f : [1,n] \to [1,365] \text{ injective}\}$. Donc Card $(A^c) = A_{365}^n$ et

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{\text{Card }(A^c)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{365!}{(365-n)!365^n} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{365-n+1}{365},$$

et

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{365-n+1}{365}.$$

On peut vérifier que dès que $n \geq 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$.

1.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

1.2.1 Probabilité conditionnelle

La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte l'information dont on dispose (à savoir qu'un événement B est réalisé) pour actualiser la probabilité que l'on donne à un événement A :

Définition 1.2.1. *Soit Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $A, B \subset \Omega$. La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B est notée $\mathbb{P}(A|B)$ et définie par*

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) & \text{si } \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Remarque 1.2.2. Lorsque l'on sait que l'événement B est réalisé, il est naturel d'affecter à l'événement A un poids proportionnel à $\mathbb{P}(A \cap B)$, ce qui justifie le choix du numérateur dans la définition précédente. Le dénominateur $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)$ est une constante de normalisation qui assure que $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$.

Exercice résolu 1.2.3. 1. *Dans une famille qui comporte deux enfants, l'un est une fille. On cherche la probabilité que l'autre soit un garçon.*
On choisit $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ où par exemple FG signifie que l'aîné des enfants est une fille et le second un garçon.
Cet espace est muni de la probabilité uniforme. On note

$$A = \{\text{un des enfants est un garçon}\} = \{FG, GF, GG\}$$
$$B = \{\text{un des enfants est une fille}\} = \{FF, FG, GF\}.$$

On a $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card }(B)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{3}{4}$. Comme $A \cap B = \{FG, GF\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{Card }(A \cap B)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{1}{2}$.
Donc la probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

2. *On suppose maintenant que l'aîné des enfants est une fille. On veut alors connaître la probabilité pour que l'autre soit un garçon.*

   En reprenant la démarche ci-dessus, on obtient que cette probabilité vaut $1/2$.

Dans certains problèmes, ce sont les probabilités conditionnelles que l'on connaît naturellement et on est amené à utiliser la définition sous la forme

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}$$

qui se généralise en

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) =& \mathbb{P}(A_m|A_1 \cap \ldots \cap A_{m-1}) \\ & \times \mathbb{P}(A_{m-1}|A_1 \cap \ldots \cap A_{m-2}) \ldots \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1),\end{aligned}$$

pour m événements $A_1, \ldots, A_m$.

Exercice résolu 1.2.4. *Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend successivement deux pièces au hasard dans le lot (sans remise). Quelle est la probabilité pour que les deux pièces soient correctes.*

On note A_1 l'événement la première pièce est bonne et A_2 l'événement la seconde pièce est bonne.
Comme, au départ, il y a 6 pièces bonnes sur 10, $\mathbb{P}(A_1) = 6/10 = 3/5$. Lorsque l'on a retiré une pièce bonne, il reste 5 pièces bonnes sur 9. D'où $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 5/9$. On conclut que la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3}.$$

On peut retrouver ce résultat en munissant l'espace

$$\Omega = \{\text{sous-ensembles comportant 2 pièces de l'ensemble des 10 pièces}\}$$

de la probabilité uniforme. L'événement dont on cherche la probabilité est

$$A = \{\text{sous-ensembles comportant 2 pièces de l'ensemble des 6 pièces correctes}\}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6!\ 8!\ 2!}{10!\ 4!\ 2!} = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}.$$

Enfin le résultat suivant qui porte le nom de formule de Bayes est souvent utile.

Proposition 1.2.5. *Soit $B_1, \ldots, B_m$ une partition de Ω (i.e. des sous-ensembles disjoints de Ω dont la réunion est Ω) et $A \subset \Omega$ t.q. $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors pour tout $1 \leq i \leq m$,*

$$\boxed{\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^m \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.}$$

Démonstration : Le numérateur du second membre est égal à $\mathbb{P}(A \cap B_i)$. Le dénominateur vaut $\sum_{j=1}^m \mathbb{P}(A \cap B_j)$ et comme les B_j forment une partition de Ω il est égal à $\mathbb{P}(A)$. Donc le second membre est bien égal à $\mathbb{P}(A \cap B_i)/\mathbb{P}(A)$. □

Exercice 1.2.6. Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais le test est également positif pour 2% des personnes en bonne santé. La proportion de personnes malades dans la population soumise au test est de 10^{-3}. Calculer la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif.

Exercice 1.2.7. Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. À l'aide de ces données vérifier qu'un jeune a 2.87 fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager.

1.2.2 Indépendance

Définition 1.2.8. *Soit Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Deux événements A et B sont dits indépendants si*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).}$$

Remarque 1.2.9. L'indépendance de A et B se caractérise aussi par les relations $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire que la probabilité donnée à l'événement A (resp. B) n'est pas modifiée par l'information que l'événement B (resp. A) est réalisé.

Définition 1.2.10. *m événements $A_1, \ldots, A_m$ sont dits indépendants si*

$$\forall I \subset \{1, \ldots, m\},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Attention

- Il ne suffit pas que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)$ pour que les événements soient indépendants.
- Pour que 3 événements soient indépendants, il ne suffit pas qu'il soient 2 à 2 indépendants.

Exemple 1.2.11. Jet de deux pièces à Pile ou Face : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ où par exemple PF signifie que la première pièce donne Pile et la seconde Face. Cet espace est muni de la probabilité uniforme.
On note A l'événement "la première pièce donne Pile", B l'événement "la seconde pièce donne Face" et C l'événement "les deux pièces donnent le même résultat".

$$\begin{array}{rlrll}
A & = \{PP, PF\} & \mathbb{P}(A) & = 1/2 & \\
B & = \{PF, FF\} & \mathbb{P}(B) & = 1/2 & \\
C & = \{PP, FF\} & \mathbb{P}(C) & = 1/2 & \\
A \cap B & = \{PF\} & \mathbb{P}(A \cap B) & = 1/4 & = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
A \cap C & = \{PP\} & \mathbb{P}(A \cap C) & = 1/4 & = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
B \cap C & = \{FF\} & \mathbb{P}(B \cap C) & = 1/4 & = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
A \cap B \cap C & = \emptyset & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) & = 0 & \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{array}$$

Ainsi les événements A, B et C sont 2 à 2 indépendants mais pas indépendants.

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1. Deux événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 1.3.2. On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot "ATTACHANT". Quelle est la probabilité d'obtenir "CHAT" ?

Exercice 1.3.3. Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle. Il propose à Eugène de lancer 5 fois la pièce et de ne payer que si apparaît une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou de 3 faces consécutifs. Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. À tort ou à raison ?

Exercice corrigé 1.3.4. Vous jouez à deux à la roulette russe avec un revolver doté d'un barillet tournant qui comporte six emplacements pour les balles. Chaque fois que l'on presse la détente, le barillet tourne d'un cran. Deux balles sont insérées côte à côte dans le barillet qui est ensuite positionné au hasard. Votre adversaire place le premier le canon du revolver contre sa tempe, presse la détente ... et reste en vie. Grand seigneur, il vous propose de faire tourner à nouveau le barillet au hasard avant de tirer à votre tour. Que décidez-vous ?

Exercice 1.3.5. Une personne rentre chez elle après une soirée un peu trop arrosée. Elle ne sait plus laquelle des n clés qui se trouvent dans sa poche ouvre la porte de son domicile. Elle essaie donc les clés successivement. Déterminer la probabilité pour que la k-ième clé soit la bonne ($1 \leq k \leq n$).

Exercice 1.3.6. On note T la valeur obtenue lors du jet d'un dé à douze faces (numérotées de 1 à 12) et S le total obtenu lors du jet de deux dés à six faces (numérotées de 1 à 6). Calculez $\mathbb{P}(S > T)$, $\mathbb{P}(S = T)$ et $\mathbb{P}(S < T)$. Dans un jeu à deux joueurs où celui qui obtient le plus grand total gagne, on vous propose de choisir entre le dé à douze faces et les deux dés à six faces. Quel est votre choix ?

Exercice 1.3.7. Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements. Montrer la formule du crible (ou formule de Poincaré)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} p_k \qquad \text{où} \qquad p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$$

On pourra commencer par établir que pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\Big).$$

Exercice corrigé 1.3.8. L'inspecteur chargé d'une enquête criminelle est à un certain stade convaincu à 60% de la culpabilité d'un suspect. Une nouvelle pièce à conviction permet soudain d'affirmer que le criminel est gaucher. Or 7% des individus dans la population sont gauchers. Comment l'inspecteur doit-il réapprécier la culpabilité du suspect, s'il se trouve que le suspect est gaucher ?

Exercice 1.3.9. Trois chasseurs tirent en même temps sur un éléphant lors d'un safari. La bête meurt atteinte par deux balles. On estime la valeur d'un chasseur par sa probabilité d'atteindre la cible en un coup. Ces probabilités sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. Trouver pour chacun des chasseurs, la probabilité d'avoir raté l'éléphant.

Exercice 1.3.10. On dispose d'une carte comportant 2 faces rouges, d'une carte comportant une face rouge et une face blanche et d'une carte comportant 2 faces blanches. Une des trois cartes est tirée au sort et une des faces de cette carte (également choisie au hasard) est exposée. Cette face est rouge. On vous demande de parier sur la couleur de la face cachée. Choisissez-vous rouge ou blanc ?

Exercice 1.3.11. La couleur des yeux d'une personne est déterminée par 2 gènes dont l'un est transmis par le père et l'autre par la mère. On suppose qu'il y a deux formes possibles pour les gènes : la forme B (bleue) et la forme M (marron). La forme B est récessive c'est à dire qu'une personne qui a le génotype BM ou MB a les yeux marrons. Vos parents ont tous deux les yeux marrons mais votre sœur a les yeux bleus. Quelle est la probabilité pour que vous ayez les yeux marrons ? On suppose en plus que votre conjoint a les yeux bleus tandis que votre premier enfant a les yeux marrons. Quelle est la probabilité pour que votre second enfant ait les yeux bleus ?

1.4 Résumé

- Soit $A, B \subset \Omega$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).}$$

Pour $B = A^c$, cette égalité se récrit

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c).}$$

- Pour $A, B \subset \Omega$, on appelle probabilité conditionnelle de l'événement A sachant l'événement B le nombre

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.}$$

- Les événements $A_1, \ldots, A_m$ sont dits indépendants si

$$\forall I \subset [1, m],\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

En particulier les événements A et B sont dits indépendants si

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).}$$