I. De la loi binomiale à la loi de Poisson (loi de probabilité d'une VA discrète)

Les calculs de probabilité avec la loi binomiale peuvent vite devenir fastidieux, aussi il peut être intéressant d'utiliser une approximation par d'autres lois de probabilité, et notamment la loi de Poisson.

La loi de Poisson peut en effet être vue également comme l'approximation d'une loi binomiale.

Remarque : La loi de Poisson a été définie dans un premier temps indépendamment de la loi binomiale. Il s'est avéré par la suite que la loi binomiale convergeait vers la loi de Poisson. Et donc lorsque certaines conditions sont réunies (elles sont précisées plus loin), la loi binomiale peut être approximée à une loi de Poisson.

Un peu d'histoire : qui était Poisson ? (source : Encyclopédie Larousse)

« Siméon Denis Poisson est un mathématicien français (1781 – 1840). Il est un des créateurs de la physique mathématique. **Il a appliqué l'analyse mathématique** à la mécanique céleste et à la théorie de l'attraction, à celle de la chaleur, à l'électricité, à l'élasticité, à la lumière, au magnétisme et **au calcul des probabilités** ».

En probabilité, on lui doit la loi du même nom.

La loi de poisson – Loi de probabilité d'une VA discrète

La loi de Poisson s'applique à des variables aléatoires X prenant des valeurs discrètes k (et non continues ; *Rappel* : k ne peut pas prendre toutes les valeurs dans un intervalle).

Soit X une VA, on dit qu'elle suit une loi de Poisson de paramètre λ (notée : X ~> $\mathscr{P}$ (λ)), si et seulement si pour toute valeur entière de k (autrement dit k appartient à l'ensemble des entiers naturels), nous avons :

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

P(X=k) désigne la probabilité que la variable X prenne la valeur k. Il existe des tables permettant de donner les probabilités pour différentes valeurs de k. (voir applications).

Le paramètre λ est toujours strictement positif.

Espérance : E(X) = λ

Variance : V(X) = λ

Écart-type : σ(X) = $\sqrt{\lambda}$

Complément : Somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson

Si deux **variables aléatoires indépendantes** notées X1 et X2 suivent respectivement les lois de Poisson suivantes $\mathscr{P}$ (λ**1**) et $\mathscr{P}$ (λ**2**) alors X1 + X2 suit la loi de Poisson $\mathscr{P}$ (λ**1 +** λ**2**).

Conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}$(n,p), X peut être approchée par une loi de Poisson avec λ = np :

$\boxed{\textit{Si } n>= 30 \textit{ et } p < 0.1 \textit{ et } np<15}$

<u>Remarque</u> : ces conditions d'approximations ne sont pas universelles et peuvent varier en fonction des auteurs. Elles sont toutefois en général assez proches.

Application 1 – Calcul de probabilités à partir d'une loi binomiale, approximation à la loi de Poisson et comparaison

La SVR, Société Vendéenne de Roulements, fabrique différents types de roulement à bille pour l'industrie. En moyenne 5% des roulements sont défectueux. La production quotidienne est d'environ 50 000 roulements. Chaque jour, on prélève un roulement au hasard parmi cette production et on répète 100 fois ce prélèvement (en clair vous constituez chaque jour un échantillon de 100 roulements). Comme la production est très grande, **l'hypothèse d'indépendance des prélèvements peut être faite**.

On appelle X la variable aléatoire suivante : « nombre de roulements défectueux sur un prélèvement de 100 roulements ».

Travail à faire :

1) Préciser la loi de probabilité suivie par la VA X.
2) Calculer les probabilités suivantes :
   a. P(X=4)
   b. P(X=6)
   c. P(X=10)
   d. P(X<=5)

Remarque : les calculs pourront être menés à partir d'une calculatrice, d'une table ou d'un tableur.

3) Préciser pourquoi la loi de X peut être approximée par une loi de Poisson. Préciser le paramètre de cette loi.
4) Calculer de nouveau les probabilités précédentes et dresser un tableau de comparaisons et commenter.

La loi de Poisson utilisée indépendamment de la loi binomiale

La loi de Poisson est souvent utilisée comme approximation de la loi binomiale. Toutefois son utilisation se justifie dans de nombreux problèmes de hasard indépendamment de la loi binomiale.

La distribution (loi) de Poisson est une distribution utilisée lorsqu'il s'agit de déterminer des probabilités de succès relatives à des évènements que l'on considère comme répartis dans le temps ou dans l'espace.

« On utilise l'expression processus de Poisson pour désigner un processus qui, en tous points, est analogue à celui de Bernoulli, sauf qu'ici les évènements sont étudiés dans leur apparition sur un intervalle continu au lieu d'être relié à des épreuves discontinues. »

Exemples :

- L'arrivée de camions à un quai pour chargement ;
- L'arrivée de clients à une caisse ;
- Le nombre d'erreurs sur une page d'un document ;

- Les ventes d’un produit donné dans un magasin ;
- Les pannes de machine.

Dans les exemples ci-dessus, on s'intéresse à un grand nombre d'événements indépendants et on observe qu’ils se produisent en moyenne un certain nombre de fois (le λ de la loi de Poisson) durant un intervalle de temps donné. La loi de Poisson indique la probabilité que l'événement se produise seulement k fois exactement durant cette période.

Pour donner du sens : Cette loi peut par exemple être utilisée pour gérer les caisses d’un hypermarché. Si l’on connait les fréquentations moyennes horaires du magasin, grâce à des statistiques (étude des fréquentations passées), on peut en déduire à partir de la loi de Poisson le nombre de caisses à ouvrir pour limiter le temps d’attente du client. En fonction des horaires de la journée, le nombre de caisses ouvertes sera modulé. Quelle que soit l’heure de la journée, le temps d’attente sera similaire pour la satisfaction du client. Nous aurions également pu prendre un cas d’attente à un guichet de l’administration et nombre de guichets ouverts.

Application 2 – Les pannes de machine

La SVR, Société Vendéenne de Roulements, qui fabrique différents types de roulement à bille pour l’industrie s’interroge sur l’organisation de son service maintenance. Cette entreprise fonctionne 16 heures par jour par équipes de 2 fois 8 heures. Elle travaille 7 jours sur 7. Les équipes qui acceptent de travailler les samedis et dimanches bénéficient d’un aménagement avantageux du temps de travail.

Pour limiter les arrêts de production, la société dispose d’un service de maintenance capable d’intervenir sur les machines à tout moment. La société envisage de recruter pour accélérer la réparation des machines et réduire fortement les temps d’arrêt des machines en maintenance.

Par le passé, il a été constaté qu’au cours d’une période de 8 heures de travail, le nombre moyen de pannes nécessitant l’intervention du service de maintenance était de 4. Ces pannes surviennent totalement au hasard et sont indépendantes entre-elles.

On appelle X la VA « nombre de pannes sur une période de 8 heures ». Le responsable de la maintenance estime que X suit une loi de Poisson

Travail à faire :

1- Calculer le paramètre de la loi de Poisson suivie par X.
2- Calculer l’espérance mathématique, la variance et l’écart-type.
3- Calculer la probabilité que le nombre de pannes sur une période de 8 heures soit :
   a. Égal à 2 ;
   b. Égal à 4 ;
   c. Inférieur ou égale à 4 ;
   d. Strictement supérieur à 4.

<u>**Remarque**</u> : pour le calcul des probabilités, vous pouvez utiliser votre calculatrice ou les tables de la loi de Poisson.

II. Des lois binomiale et de Poisson à la loi normale (loi de probabilité d'une VA continue)

La loi normale encore appelée Loi de Laplace-Gauss (du nom de ces deux mathématiciens) ou parfois simplement loi de Gauss est une loi de probabilité très utilisée dans de nombreux domaines et particulièrement par les chercheurs (en chimie, en physique, en médecine, en économie, en gestion, etc.).

Vous trouverez plus loin un peu d'histoire sur cette loi et l'origine de son nom.

La loi normale est d'abord une loi de probabilité d'une VA continue, c'est-à-dire que les valeurs prises par la variable sont comprises dans un intervalle et ne sont pas dénombrables. Pourquoi alors indiquer dans le titre, « de la loi binomiale et de poisson à la loi normale » dans la mesure où les deux premières sont des lois de probabilités discrètes ? Nous verrons plus loin que sous certaines conditions, il est possible d'approximer les lois binomiales et de Poisson par la loi normale.

Nous approcherons dans un premier temps la loi normale à partir de la représentation graphique de statistiques dans des exemples.

Application 3 – Représentation graphique des notes de contrôle de gestion obtenues par des étudiants à un examen

Les notes obtenues à l'épreuve de contrôle de gestion au cours d'un examen national s'échelonnent de 4 à 17. Il y a eu 1000 copies corrigées. Il a été dressé le tableau statistique suivant :

Notes	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00
Nombre de copies	2	2	6	8	12	14	24	36	42
Fréquence									

Notes	8.50	9.00	9.50	10.00	10.50	11.00	11.50	12.00	12.50
Nombre de copies	46	52	68	74	80	86	86	80	64
Fréquence									

Notes	13.00	13.50	14.00	14.50	15.00	15.50	16.00	16.50	17.00
Nombre de copies	54	48	36	26	18	16	10	6	4
Fréquence									

<u>Lecture du tableau</u> : par exemple 2 copies ont obtenu la note de 4, 86 copies la note de 11, 4 copies la note de 17, etc.

Travail à faire :

1- Calculer les fréquences. Puis calculer la moyenne et l'écart-type des notes obtenues à l'épreuve de contrôle de gestion. (Les calculs pourront être menés à partir d'un tableur).

2- Faire une représentation graphique permettant de visualiser le profil des notes obtenues. Mettre en abscisse la note obtenue et en ordonnées la fréquence. (Il est conseillé d'utiliser un tableur pour réaliser le graphique).
3- Commenter la forme de la courbe.

Application 4 – Représentation graphique des ventes d'un produit au cours d'une année

Une entreprise a relevé pendant 300 jours ouvrables consécutifs, le chiffre d'affaires réalisé par l'un de ses points de vente. Les données sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Chiffre d'affaires observé en K€				
Intervalle		Intervalles	Centre de l'intervalle	Nombre de jours
Borne inférieure	Borne supérieure			
145	150	[145,150[	147,5	2
150	155	[150,155[	152,5	2
155	160	[155,160[	157,5	5
160	165	[160,165[	162,5	14
165	170	[165,170[	167,5	38
170	175	[170,175[	172,5	52
175	180	[175,180[	177,5	76
180	185	[180,185[	182,5	50
185	190	[185,190[	187,5	40
190	195	[190,195[	192,5	13
195	200	[195,200[	197,5	5
200	205	[200,205[	202,5	2
205	210	[205,210[	207,5	1
				300

Nous remarquons que les chiffres d'affaires réalisés vont de 145 K€ à 210 K€. La colonne nombre de jours indique le nombre de fois où le chiffre d'affaires a été observé dans l'intervalle de la 3ème colonne.

Comme il s'agit de l'examen de statistiques, la précision par intervalle est suffisante pour l'analyse. Pour le calcul de la moyenne et de l'écart-type, nous pouvons par approximation nous baser sur le centre de l'intervalle (4ème colonne).

Travail à faire :

1- Calculer les fréquences (arrondir à 3 chiffres après la virgule). Puis calculer la moyenne et l'écart-type des chiffres d'affaires observés. (Les calculs pourront être menés à partir d'un tableur).
2- Faire une représentation graphique permettant de visualiser le profil des chiffres d'affaires. (Il est conseillé d'utiliser un tableur pour réaliser le graphique).
3- Commenter la forme de la courbe.

Quelles observations et commentaires pouvons-nous retirer des deux applications précédentes ?

Dans le premier cas, nous avons travaillé sur une variable discrète, les notes peuvent aller de 0 à 20 mais sont arrondies au demi-point. Donc l'univers des possibles (nombre de notes possibles) est dénombrable.

Dans le second cas, nous avons travaillé sur une variable continue, le chiffre d'affaires pouvant prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle. Le nombre de chiffre d'affaires possibles n'est pas dénombrable.

Mais ce qu'il y a de commun entre les deux, c'est la forme de la représentation graphique, elles sont similaires quant à leur forme.

Nous pourrions trouver multiples exemples dans la réalité et dans divers domaines (gestion, physique, chimie, etc.) ou la représentation des fréquences des variables conduit à la même forme de courbe.

Il n'est donc pas surprenant que les mathématiciens se soient penchés sur l'élaboration d'une fonction de densité (on sait que des statistiques aux probabilités, il n'y a qu'un pas) qui permet d'obtenir une telle représentation graphique. Nous donnons un peu plus loin cette fonction de densité.

Il n'est pas non plus surprenant de pouvoir approximer des lois discrètes telles que Binomiale ou Poisson à une loi continue, la loi normale.

La forme de la courbe est souvent appelée courbe en cloche ou courbe en chapeau de gendarme.

Un peu d'histoire – Pourquoi « loi normale » ?

Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_de_la_loi_normale

« La première attribution du terme « normal » pour la loi est attribuée à Henri Poincaré qui énonça pendant un de ses cours en 1893 : « Je dirai, pour abréger, que la loi de probabilité est normale, lorsque la valeur de la probabilité est représentée par cette intégrale. ». En 1894, Irving Fisher écrivit une phrase sensiblement différente : « Lorsqu'une loi d'écarts est exprimée par cette intégrale nous disons que la probabilité est normale ». ***Le terme « normal » vient du fait que cette loi apparaît souvent dans la nature et que de toutes les lois qui apparaissent naturellement, la loi normale est la plus courante et la plus adaptée aux observations***. Karl Pearson explique en 1893 le choix du terme « normal » pour la loi et la courbe par la facilité de ne pas fixer de paternité.

Puisque la première apparition de la loi normale s'est faite par l'observation de la courbe de sa densité de probabilité, le nom de la courbe sert parfois à définir la loi. Pour mieux donner une image de sa forme, cette courbe est parfois imagée en « chapeau de gendarme vu de face », « cloche plate » ou encore « boa qui a avalé un dromadaire ».

Autour de 1950, la commission de terminologie statistique de l'Afnor, probablement emmené par Fréchet, décida de normaliser le terme « loi de Laplace ». Le polytechnicien André Pallez ajoute :

« La Commission, considérant que Laplace a découvert la loi qui devrait porter son nom et qui porte celui de Gauss, à une époque où Gauss était encore un jeune enfant, a rétabli la vérité en rendant à Laplace l'hommage qui lui était dû. ».

Cependant, aujourd'hui au XXIe siècle, les deux noms les plus utilisés sont « loi de Gauss » et « loi normale ». Le nom de Gauss est resté plus que les autres, grâce, entre autre, à l'influence de l'ouvrage pédagogique de Joseph Bertrand publié à la fin du XIXe siècle. ».

Il nous faut désormais définir cette loi continue appelée loi normale

« Dès qu'un phénomène est la superposition d'un grand nombre de causes aléatoires indépendantes, une cloche se présente. »

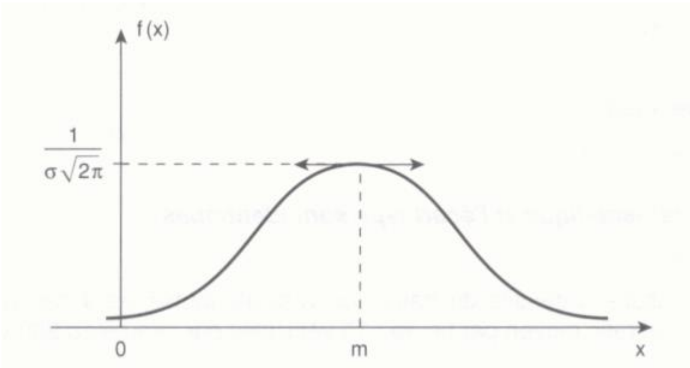
Soit X une variable aléatoire continue. X prend donc n'importe quelle valeur dans un intervalle.

On dit que X suis une loi normale (ou loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss ou loi Gaussienne) de paramètre **m (la moyenne ou espérance mathématique de X)** et **σ (l'écart-type de X)** quand elle a pour densité de probabilité la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

__Notation__ : X → N(m ; σ)

__Représentation graphique générale__ :



__Rappel__ : la fonction densité ne permet pas de calculer la probabilité pour une valeur donnée de la variable X, cette probabilité est nulle car les valeurs prises par X ne sont pas dénombrables. Nous ne calculerons que des probabilités par exemple du type P(X<=a), a étant un nombre réel quelconque. Nous utiliserons donc la fonction de répartition de X. ***Nous donnons ci-dessous la définition de la fonction de répartition sachant que nous pourrons nous en passer dans les calculs (voir plus loin)*** :

$$F(X) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

Précisions importantes

Pour rassurer nos lecteurs, nous tenons à préciser que pour faire les calculs de probabilité, nous n'aurons pas besoin d'utiliser les définitions des fonctions de densité ou de répartition. Des tables de loi normale ou la calculatrice viendront à notre secours.

Une loi normale particulière : la loi normale centrée réduite N(0;1)

Il est d'usage de noter T la variable aléatoire notée N (0,1) qui suit la loi normale centrée réduite. Elle a pour moyenne 0 et pour écart-type 1. E (T) = 0 σ (T) =1

Si X → N(m ; σ) alors nous avons T = (X-m) / σ

Quel est l'intérêt de la loi normale centrée réduite ?

- Toute loi normale quelconque peut être « transformée » en la loi normale centrée réduite grâce à la relation T = (X-m) / σ. Or il existe des tables de la loi normale centrée réduite.
- Conséquence : ***pour calculer une probabilité avec une loi normale quelconque, il suffit d'opérer une transformation pour se ramener à la loi normale centrée réduite afin de pouvoir utiliser ces tables***.

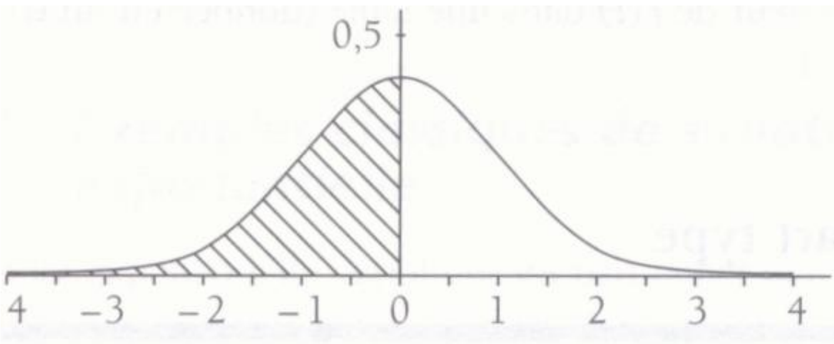
Propriétés fondamentales de la loi normale centrée réduite : (voir représentations graphiques en dessous de cet encadré) (t est une valeur quelconque) (et voir remarque à la fin de cet encadré)

- **P(T<=0) = P(T>0) = 0,5** Autre notation : **Π(0) = 0,5 = 1 - Π(0)**
- **P(T>t) = 1 – P(T<=t)** Autre notation : **1 – P(T<=t) = 1 - Π(t)**
- **P(T<-t) = 1 – P(T<=t)** Autre notation : **Π(-t) = 1 - Π(t)**
- **P(T>-t) = P(T<t) = Π(t)** (cette propriété résulte logiquement des deux précédentes)
- On considère l'intervalle [t1 ; t2], t1 et t2 sont deux réels (t2 est bien supérieur à t1), nous pouvons écrire que : **P(t1<T<t2) = P(T<t2) – P(T<t1)** ou encore = **Π(t2) – Π(t1)**
- Conséquence : **P(-t<T<=t) = P(T<=t) – P(T<-t) = P(T<=t) – (1 – P(T<=t)) = 2 P(T<=t) – 1 = 2Π(t) – 1**
- **P (-t < T < t) = P (T < t) – P (T < -t) = P (T < t) – (1 – P (T < t) = 2 P (T < t) – 1 = 2Π(t) - 1**

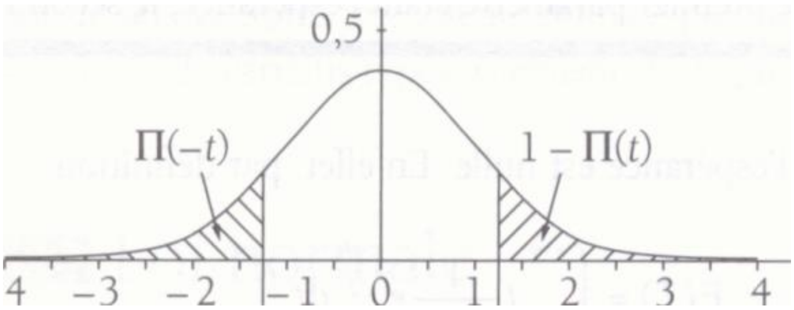
***Fondamental* : apprenez à utiliser la courbe, vous retrouverez facilement toutes ces propriétés grâce à la symétrie. Il vous suffit de tracer schématiquement la courbe et de retenir que sous la courbe, la probabilité totale est de 1 et que de part et d'autre de l'axe des ordonnées, le cumul des probabilités est de 0,5 (voir schéma page suivante).**

***Remarque* : comme la probabilité d'une valeur particulière est nulle, on pourra écrire que P(X<t) = P(X<=t) ou encore que P(X>t) = P(X>=t). Cela facilitera l'application des propriétés et les calculs dans les applications.**

Voici une représentation graphique de la loi normale centrée réduite. La courbe est symétrique, comme l'aire sous la courbe est égale à 1 (la somme des probabilité de l'ensemble des valeurs fait toujours 1), l'axe des ordonnées partage la probabilité en deux partie égales, donc la partie hachurée qui représente P(T<=0) est égale à 0,5 (T étant la VA qui suit N(0 ;1)).



Ci-dessous la représentation graphique qui permet de visualiser des propriété de la loi normale centrée réduite (ces propriétés résultent directement de la symétrie de la courbe) :



<u>Remarque :</u> nous donnons ci-dessous les fonctions à titre indicatif, nous ne les utiliserons pas dans la résolution des problèmes)

La fonction densité de la loi normale centrée réduite : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}$

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $F(t) = \Pi(t) = P(T < t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

Il est d'usage de noter la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite **Π(t) = P(T<=t) t étant une valeur réelle.**

Application 5 – Avec corrigé

Soit une VA X qui suit une loi normale de moyenne 500 et d'écart-type 50 : **X → N(500 ; 50)**.

Travail à faire :

1- Calculer les probabilités suivantes : (les calculs pourront être faits dans un premier temps à la calculatrice puis en utilisant la loi normale centrée réduite)
   a. P(X<=550)
   b. P(X<=600)
   c. P(X<=650)
   d. P(X<=700)

e. P(X>550)
f. P(X<=450)
g. P(450<X<=500)

Proposition de correction de l'application 5 (utilisation des tables de la loi normale centrée réduite)

On désigne par T la loi normale centrée réduite.

a. P(X<=550) = P((X-500)/50 <= (550-500)/50) = P(T <= 1) = $\Pi(1)$

Dans la table nous lisons : P(T <= 1) = $\Pi(1)$ = **0,8413 (soit 84,13 %)**

b. P(X<=600) = P((X-500)/50 <= (600-500)/50) = P(T <= 2) = $\Pi(2)$

Dans la table nous lisons : P(T <= 2) = $\Pi(2)$ = **0,9772 (soit 97,72 %)**

c. P(X<=650) = P((X-500)/50 <= (650-500)/50) = P(T <= 3) = $\Pi(3)$

Dans la table nous lisons : P(T <= 3) = $\Pi(3)$ = **0,99865 (soit 99,865 %)**

Remarque : la probabilité qu'une VA normale s'écarte de plus ou moins trois écart-type peut être considérée comme quasi nulle.

d. P(X<=700) = P((X-500)/50 <= (700-500)/50) = P(T <= 4) = $\Pi(4)$

Dans la table nous lisons : P(T <= 4) = $\Pi(4)$ = **0,999968 (soit 99,9968 %) Quasi 1 (100 %)**

e. P(X>550) = P((X-500)/50 > (550-500)/50) = P(T > 1) = 1 - P(T <= 1) = 1 - $\Pi(1)$

Soit 1 - 0,8413 = **0.1587 (15,87 %)**

Les tables ne donnent que P(X<=t), il faut donc utiliser les propriétés.

f. P(X<=450) = P((X-500)/50 > (450-500)/50) = P(T <= -1) = 1 - P(T <= 1) = 1 - $\Pi(1)$

Soit 1 - 0,8413 = **0.1587 (15,87 %)**

Remarque : P(T>-t) = P(T<t) = $\Pi(t)$

g. P(450<X<=500) = P(450-500)/50<(X-500)/50<550-500)/50) = P(-1<T<1) = 2P(T<1) – 1 = 2*0,8413 – 1 = **0,6826 (68,26 %)**
Ou encore en utilisant les résultats précédents :
P(450<X<=500) = 1 - P(X<=450) - P(X>550) = 1 – 0,1587 – 0,1587 = 0,6826

Application 6 – Calcul de probabilités – VA qui suit une loi normale – Utilisation des tables de la loi normale centrée réduite

Après étude statistique, il apparait que la quantité mensuelle de vélos électriques pour dames, vendus par un fabriquant et notée V, est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 2 000 et d'écart-type 200 : **V → N(2 000 ; 200)**.

Travail à faire :

1- Calculer les probabilités suivantes : (les calculs pourront être faits dans un premier temps en utilisant la loi normale centrée réduite puis à la calculatrice)
   a. P(X<=2000)
   b. P(X<=2600)
   c. P(X<=2800)
   d. P(X>2000)
   e. P(X>2600)
   f. P(1600<X<=2400)
   g. P(1800<X<=2400)

Somme de lois normales indépendantes – Opérations sur les variables aléatoires normales – Propriétés fondamentales à retenir

Soient X1 et X2 deux lois normales **indépendantes** :

- $X_1 \rightarrow N(m_1 ; \sigma_1)$
- $X_2 \rightarrow N(m_2 ; \sigma_2)$

Soient a et b deux réels

Produit d'une loi normale par un réel

$$aX+b \rightarrow N(am+b ; \sqrt{a^2\sigma^2}) = N(am+b ; |a|\sigma)$$

|a| désigne la valeur absolue de a.

La variable aléatoire a X + b suit la loi normale d'espérance am+b et d'écart type $|a|\sigma$ (la variance est $a^2\sigma^2$).

Ajouter le réel b ne modifie pas la valeur de la variance et de l'écart-type : $aX \rightarrow N(am ; \sqrt{a^2\sigma^2})$.

Somme de lois normales indépendantes

$$X_1 + X_2 \rightarrow N(m_1+m_2 ; \sqrt{\sigma 1^2 + \sigma 2^2})$$

L'indépendance est nécessaire pour affirmer que $X_1 + X_2$ suit une loi normale de moyenne m_1+m_2 et d'écart-type $\sqrt{\sigma 1^2 + \sigma 2^2}$.

Attention : l'écart-type n'est pas la somme des écarts-types. Pour les calculs, il faut toujours passer par la variance. La variance est $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, l'écart-type est obtenu en prenant la racine carrée.

Différence de lois normales indépendantes

$$X_1 - X_2 \rightarrow N(m_1-m_2 ; \sqrt{\sigma 1^2 + \sigma 2^2})$$

Remarque : l'écart-type est le même que dans le cas de la somme. Seule la moyenne est différente (m_1-m_2).

Application 7 – Utilisation de la loi normale pour calculer la probabilité d'atteindre un seuil de rentabilité

Un ancien coureur cycliste s'est reconverti dans la fabrication artisanale de vélos de course sur route. Sa clientèle est composée d'amateur-e-s qui pratiquent la compétition.

Il propose deux types de vélo :

- un vélo de course classique noté V1 et vendu 4 000 euros HT ;
- et un vélo plutôt destiné aux triathlètes noté V2 et vendu 4 500 euros HT.

Le taux de marge sur coût variable sur chaque vélo est en moyenne de 30 % (les coûts variables sont sensiblement les mêmes pour chaque type de vélo).

Les charges de structure (fixes) annuelles s'élèvent à environ 150 000 euros HT.

Des études statistiques ont montré qu'il était possible de considérer que les ventes annuelles Q1 et Q2 de cette entreprise suivent les lois normales suivantes : (le premier paramètre étant la moyenne et le second l'écart-type).

- Q1 → N(200 ; 40) Q1 est la VA représentant le nombre de vélos V1 vendus ;
- Q2 → N(140 ; 50) Q2 est la VA représentant le nombre de vélos V2 vendus.

Les variables aléatoires Q1 et Q2 sont indépendantes.

On désigne par R la variable aléatoire représentant le résultat réalisé sur les ventes de vélos.

Travail à faire :

1) Écrire la variable aléatoire R en fonction des variables aléatoires Q1 et Q2.
2) Préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire R et calculer ses paramètres.
3) Calculer la probabilité d'atteindre le seuil de rentabilité.
4) Trouver un intervalle centré autour de la moyenne dans lequel nous trouverons dans 95 % des cas le résultat de l'entreprise.

Approximation des lois binomiale et de Poisson par la loi normale (à connaître)

Nous avons pu vérifier sur des exemples que :

- la représentation graphique d'une loi binomiale (la fonction de distribution d'une VA qui suit une loi binomiale) à l'allure de la courbe d'une loi normale (fonction densité de la loi normale) ;
- la loi binomiale peut être approximée par une loi de Poisson.

Il n'est donc pas surprenant que des mathématiciens aient montré que sous certaines conditions, nous pouvions approximer une loi binomiale et une loi de Poisson par une loi normale.

<u>Remarque</u> :

- ***Il s'agit bien ici d'approximer des lois discrètes (binomiale et Poisson) par une loi continue (normale). <u>Toutefois la correction de continuité n'est pas au programme</u>.***

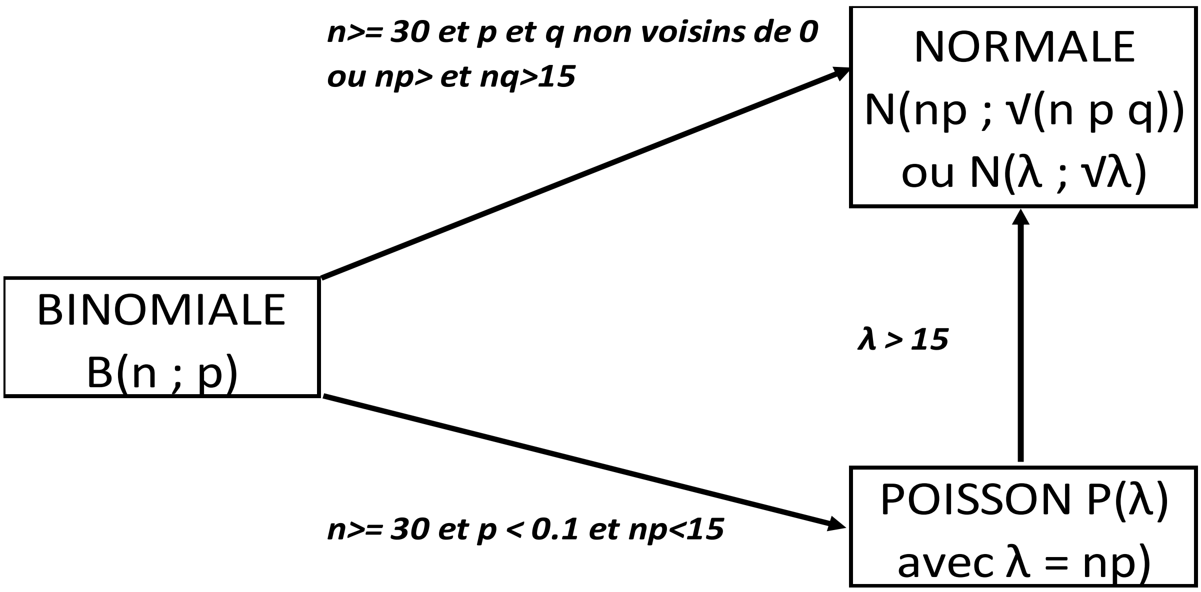
- ***Nous vous conseillons de visionner la vidéo que vous trouverez sur le net à partir du lien suivant :***

  [***https://www.youtube.com/watch?v=jCcHWzI0uqA***](https://www.youtube.com/watch?v=jCcHWzI0uqA)

  Cette vidéo explique également l'utilisation des calculatrices de marque Texas et Casio pour le calcul des probabilités avec la loi normale.

Nous pouvons résumer ces approximations par le schéma suivant :

Remarque : ces conditions d'approximations ne sont pas universelles et peuvent varier en fonction des auteurs. Elles sont toutefois en général assez proches.



Ces approximations peuvent également être résumées sous la forme d'un tableau :

Conditions d'approximation d'une loi binomiale	
Si X suit une loi binomiale B(n,p)	**X peut être approchée par une loi**
Si n>= 30 et p < 0.1 et np<15	de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec λ = np
n>= 30 et p **et** q non voisins de 0 **ou** np> et nq>15	Normale $\mathcal{N}(np,\sqrt{npq})$
Condition d'approximation d'une loi de Poisson	
Si X suit une loi de Poisson P(λ)	**X peut être approchée par une loi**
Si λ >15	Normale $\mathcal{N}(\lambda,\sqrt{\lambda})$

Application 8 – Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Une entreprise sous-traitante fabrique des composants de haute précision pour l'industrie aéronautique. Chaque produit est contrôlé à la sortie de l'atelier de fabrication. La probabilité qu'un produit soit défectueux est de 5 % (0,05). La production s'élève à 500 composants par jour.

On appelle X la variable aléatoire qui représente le nombre de produits défectueux par jour de production.

Travail à faire :

1) Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart-type σ(X) arrondi à 2 décimales.
3) Vérifier que la loi de X peut être raisonnablement approximée par une loi normale.
4) Calculer la probabilité que le nombre de produits défectueux par jour soit inférieur ou égal à 35.

Application 9 – Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Par le passé, il a été constaté qu'au cours d'une période de 90 jours de travail, le nombre moyen de pannes de machines nécessitant l'intervention du service de maintenance d'une entreprise était de 20. Ces pannes surviennent totalement au hasard et sont indépendantes entre-elles.

On appelle X la VA « nombre de pannes sur une période de 90 jours ». Le responsable de la maintenance estime que X suit une loi de Poisson.

Travail à faire :

1) Calculer l'espérance mathématique E(X), la variance V(X) et l'écart-type σ(X) arrondi à 2 décimales.
2) Vérifier que la loi de X peut être raisonnablement approximée par une loi normale.
3) Calculer la probabilité que le nombre de pannes sur une période de 90 jours soit :
    a. supérieur ou égal à 25 ;
    b. inférieur à 15.

Complément :

Un théorème fort utile : le théorème central limite (complément)

Nous compléterons cette partie par un théorème qui nous sera fort utile quand nous aborderons les notions de distribution d'échantillonnage (également au programme du DCG dans le cadre du chapitre sur la gestion de la qualité). Nous n'aurons pas à utiliser le théorème proprement dit, mais les conséquences de celui-ci. Il est donc intéressant de l'évoquer.

Nous pouvons résumer ce théorème comme suit (sans l'exprimer dans toute sa rigueur, ce qui ne nous serait pas utile) :

Soit X_1, X_2, …, Xn, n variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité notée L(m, σ), m étant la moyenne (espérance mathématique) et σ l'écart-type.

Soit la variable aléatoire $\mathbf{S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n}$

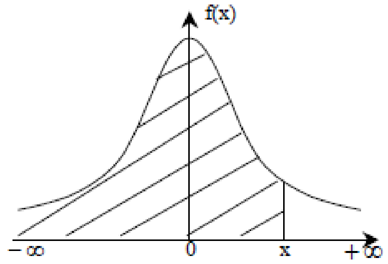
Lorsque n est suffisamment grand (en pratique n >= 30) alors Sn suit une loi normale de moyenne nm et d'écart-type $\sqrt{n}\sigma$ (racine de n multiplié par σ).

Autrement dit la connaissance de la loi suivie par chaque variable Xi n'est pas nécessaire pour dire que la somme des n variables aléatoires suit une loi normale quand le nombre de variables est important.

Annexe

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

Loi de Poisson P(λ) de paramètre λ

pour tout nombre entier naturel k : $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000